١٠

حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەمووان

کتێبی خوێندکار
پۆلی دەیەمی زانستی



چاپی هەشتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

ناوەڕۆکی کتێبەکە

ناوەڕۆکی کتێبەکە

1 ژمارەکان و کردارەکان NUMBERS AND OPERATIONS 2



2 نەخشەکان FUNCTIONS 50



3 برەکان و نەخشە دووجاکان
QUADRATIC EXPRESSIONS AND FUNCTIONS 102



4 برەکان و نەخشە ڕادەدارەکان
POLYNOMIAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS 144



5 برەکان و نەخشە ڕێژەییەکان
RATIONAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS 180



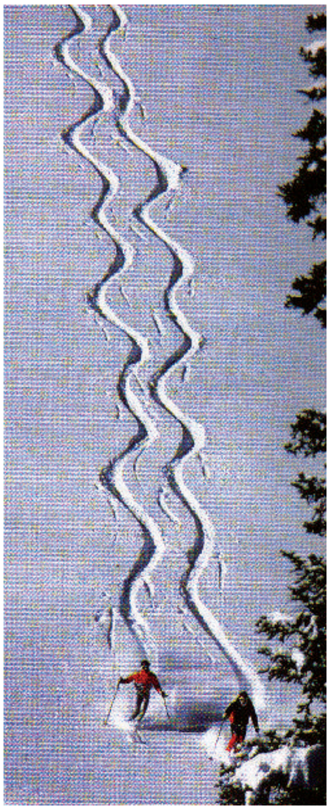
6 ئەگەر و ئامار
PROBABILITY AND STATISTICS 224



268 GEOMETRY ئەندازە 7



322 TRIGONOMETRY سێگۆشەزانی 8



بەشی یەکەم

ژمارەکان و کردارەکان

Numbers and Operations

1. کردارەکان لەسەر ژمارەکان.
2. هاوکێشەکان.
3. لاسەنگەکان.
4. هێزەکان و ڕەگەکان.
5. شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان.
6. شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلابردن.
7. بڕە ڕەگییەکان.

پرۆژەی بەش

پێداچوونەوە

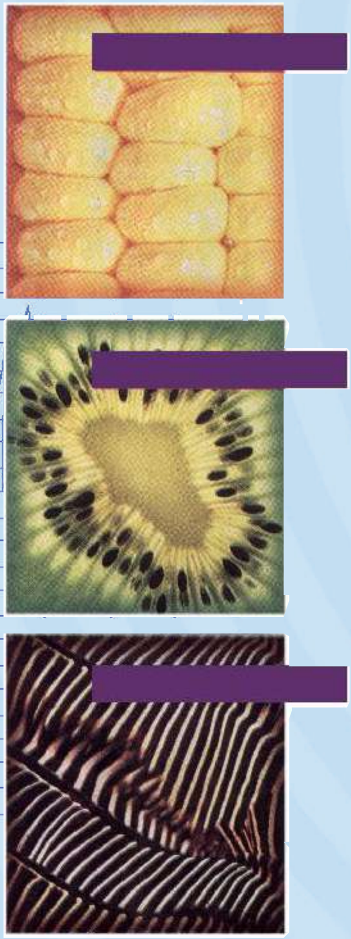
تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 1

ژمارەکان و کردارەکان

Numbers and Operations



شێوازە جیاوازەکان بە درێژایی چاخەکان سەرنجی مرۆڤایەتیان وا لە وولاتە جیاجیاکاندا ڕاکێشاوە کە هەندێکیان گەیشتوونەتە ئەو بڕوایەی کە جوانییەکی بێ وێنەیان هەیە. لەمانە شارستانییەتی کۆنەکان وەك شارستانیەتی وولاتی نێوان دوو ڕووبار و ڕۆژهەڵاتی ناوەڕاست و باشووری ئەفریقا و ڕۆژئاوای ئەمریکا، شێوازی وایان ناسیوە کە جێگای بەسەر ژیانیانەوە جێ هێشتووە و زۆر و لە جێماوە هونەریانە کاریانکردۆتە سەر کە جێگەی ستایشی شێوازە جوانەکانن.

لە جیهانی تەکنەلۆژیای هاوچەرخدا شێوازەکان ڕێساکانی زۆر لە دۆزینەوەکانی زانستی و بیرکاری ئامادە دەکات. زاناکان شێوازەکان بۆ لێکۆڵینەوە سروشت و تێگەیشتن و خەملاندنی نەزانراوەکانی تیایدا بەکاردەهێنن. هەروەها زانا بیرکارییەکان بەدوای شێوازە ڕێگەکان دەگەڕێن لەکاتی لێکۆڵینەوەیان بۆ ژمارەکان. دەکرێ شێوازەکان وەك ئامرازێکی کارا بۆ شیکاری پرسیارەکان بەکاربێت.

وانەکان





جیۆلۆجییەکان ئامرازی چاودێریکردنی بوومەلەرزە بەکاردەهێنن بۆتۆماری شێوازی هێزەکانیان.

سەبارەت بە پڕۆژەی بەشەکە

شێوازەکان یاریدەدەرت دەبێت بۆ دۆزینەوەی شیکار لە پێدراوەکانی پرسیارەکە. جەبر ئامرازی ئاسانکاریت بۆ دەکات بۆ گشتاندن و خەملاندن بەپشت بەستن بە شێوازەکان. لە پڕۆژەی ئەم بەشەدا بە شێوازە بیرکارییەکان ئاشنا دەبیت لە لاکێشە زێڕینەکان و کۆمەڵێك لە شێوە بازنەییەکان. پاش تەواوبوونی ئەم پڕۆژەیە لەتواناتدا دەبێت. شیکردنەوەی شێوازەکان لە پێدراوەکاندا بەبەکارهێنانی خشتەکان و خاڵە ڕوونکراوەییەکان.



وانەی 1

کردارەکان لەسەر ژمارەکان
Operations With Numbers

ئامانجەکان
- کۆمەڵە جیاوازەکانی ژمارەکان و پەیوەندی نێوانیان جیادەکاتەوە.
- سیفەتەکانی کردارەکان لەسەر ژمارە ڕاستییەکان و بەکارهێنانیان دەناسێت.
- بەهای بڕێکی ژمارەیی بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژمێر دەکات.



بۆچی

لە ژیانی ڕۆژانەماندا ژمارە جۆراوجۆرەکان بەکاردەهێنین وەک 32 پلە بۆ دەربڕینی گەرمی کەش وهەوا، هەروەها ژمارەی دەیی وەک 41,25 هەزار دینار بەهای کەلوپەلێك بێت.

لە پۆلەکانی ڕابردوودا جۆری جیاوازت لە ژمارەکان ناسیوە.

کۆمەڵەی ژمارەکان Sets of Number

ژمارە سروشتییەکان **Natural Numbers** $0; 1; 2; 3; 4; ...$

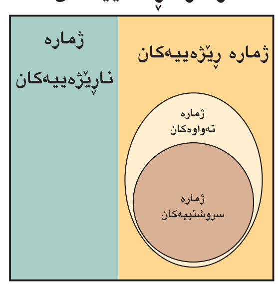
ژمارە تەواوەکان **Integers** $...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...$

ژمارە ڕێژەییەکان **Rational Numbers** $\frac{a}{b}$ کاتێك a ، b ژمارەی تەواو بن، $b \neq 0$.

ژمارە ناڕێژەییەکان **Irrational Numbers** ئەو ژمارانەن کە بەشی لای ڕاستی فاریزەکە ناکۆتا و نادووبارە بوو دەبێت.

ژمارە ڕاستییەکان **Real Numbers** هەموو ژمارە ڕێژەیی و ناڕێژەییەکان

هێلکاری ڤن (Venn) کە لە بەرامبەردا هاتووە پەیوەندی نێوان کۆمەڵە جۆراوجۆرەکانی ژمارەکان دیاریدەکات. بۆ جیاکردنەوەی ژمارە ڕێژەییەکان و ناڕێژەییەکان، لە بیرت بێ کە ژمارە ڕێژەییەکان بەشی دەیییەکەی کە کەوتۆتە لای ڕاستی فارزەکە دوا هاتووە یان دووبارەبووە. ئەگەر ژمارەی ڕێژەیی دووبارەبوو بێت دەتوانیت ئەم نموونەیەی خوارەوە بنووسیت: $3.2\overline{16} = 3.2161616...$



نموونە 1

ئەم ژمارانەی خوارەوە پۆلێن بکە لەگەڵ باسکردن.

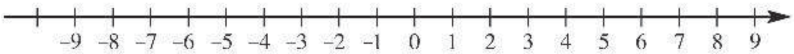
$15.121221222...$ $\quad 178.131313...$ $\quad -2.77$

شیکار

ژمارەی یەکەم ڕێژەییە چونکە بەشی لای ڕاستی فارزەکە دوا هاتووە، ژمارەی دووەمیش ڕێژەییە چونکە بەشی لای ڕاستی فارزەکە دووبارەبووە، بەڵام ژمارەی سێیەم ناڕێژەییە چونکە بەشی لای ڕاستی فارزەکە دوانە هاتووە و دووبارەبوو نیە.

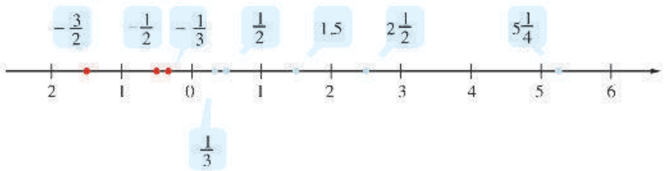
Number Line هێڵی ژمارەکان

کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان سیفەتێکی گرنگی هەیە. دەتوانیت هەر ژمارەیەکی ڕاستی بنوێنیت بە خاڵێك لەسەر هێڵێکی ڕاستی ئاراستەکراو کە پێی دەوترێت **تەوەری ژمارەکان** و هەروەها هەر خاڵێکی سەر ئەم تەوەرەیە تەنها یەك ژمارەی ڕاستی دەنوێنێت.



نموونە 2 لەسەر تەوەری ژمارەکان ئەم ژمارانە بنوێنە $5\frac{1}{4}$، $-\frac{1}{3}$، $2\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$، $1{,}5$، $\frac{1}{3}$، $-\frac{3}{2}$.

شیکار



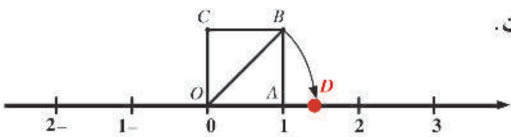
نموونە 3 چۆن $\sqrt{2}$ لەسەر تەوەری ژمارەکان دەنوێنێت؟

شیکار

ژمارەی $\sqrt{2}$تیرەی چوارگۆشەیەك دەنوێنێت کە درێژی لاکەی 1 یەکەی درێژی بێت.

لەم تێبینیەوە دەتوانیت بەم کارەی دێت هەڵسێت.

1. چوارگۆشەی $A\ B\ C\ O$ بکێشە



2. وێنەی خاڵی B بکێشە بە خولانەوەیەك (چەقەکەی خاڵی بنەڕەت O) بێت کە خاڵی B دەگوازێتەوە بۆ خاڵی D لەسەر تەوەری ژمارەکان.خاڵی D ژمارەی $\sqrt{2}$دەنوێنێت.

هەوڵبدە ئایا دەتوانیت ژمارەی $\sqrt{5}$لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنیت؟ باسیبکە.

Operations With Real Numbers کردارەکان لەسەر ژمارە ڕاستییەکان

سیفەتەکانی کۆکردنەوە و لێکدان یارمەتیت دەدات لەسەر جێبەجێکردنی کردارە ژمێرییەکان بەخێرایی و بە ئاسانی. ئەم سیفەتانەش لەم خشتەی خوارەوە ڕوون کراوەتەوە.

سیفەتەکانی هەردوو کرداری کۆکردنەوە و لێکدانی ژمارە ڕاستییەکان

سیفەت	کۆکردنەوە	لێکدان
ئاڵوگۆڕ	$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
یەکتربەستن	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
دانەی بێ لایەنی سفر ویەك لە کرداری کۆکردنەوەی ولێکدان یەك لەدوای یەك	$a+0=a$	$a\times 1=a$
پێچەوانە و هەڵگەراوە «دژەکۆکردنەوە و دژە لێکدان»	$a+(-a)=0$	$b\times\frac{1}{b}=1;\ b\neq 0$
بەشینەوەی لێکدان بەسەر کۆکردندا	$a(b+c)=ab+ac$	

نموونە 4

ئەم برە جەبریە $(a+2)\ (b+3)$ بکەرەوە.

شیکار

$(a+2)(b+3)=a(b+3)+2(b+3)$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

$=ab+3a+2b+6$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

هەوڵبدە بڕی جەبری $(a+b)\ (c-d)$ بکەرەوە و هۆی هەر هەنگاوێك دەربخە.

نموونە 5

جێبەجێکردن بازرگانی

کاتێك بازرگانێك داشکاندن بە بڕی 25% لە نرخی کاڵایەك دەخاتەڕوو و نرخە تازەکەی دەبێتە $t=c-0.25c$.

کە t نرخە تازەکەیە، و c نرخی بنەڕتییە، ڕوونیبکەوە کە $t=0.75c$

شیکار $t=c-0.25c=1\times c-0.25\times c=(1-0.25)c=0.75c$

هەوڵبدە ڕوونیبکەوە کە نرخی تازەی کاڵایەك، نرخە بنەڕەتیەکەی c بێت پاش بەرزکردنەوەی نرخەکەی بە ڕێژەی $r\%$ دەبێتە $t=\left(1+\frac{r}{100}\right)c$.

ڕیزبەندی کردارەکان Order of Operation

بۆ ئەژمێرکردنی بەهای بڕێکی ژمارەیی پێویستە کرداره ژمێرەییەکان جێبەجێبکەیت بەپێی ئەم ڕیزبەندیەی لای خوارەوە.

1. بڕەکان ئەژمێربکە لەناو هێماکانی کۆبووەکاندا (رموز التجميع)، وەك کەوانە و کەرتەکان بەپێی هەنگاوەکانی 2 تا 4.
2. هێزەکان ئەژمێر بکە.
3. لێکبدەو دابەشبکە یەك لەدوای یەك لە چەپەوە دەستپێبکە.
4. کۆ بکەوە و لێکدەربکە یەك لەدوای یەك لە چەپەوە دەستپێبکە.

نموونە 6

بەهای بڕی $\frac{2^2(12+8)}{5}$ ئەژمێربکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

شیکار

$\frac{2^2(12+8)}{5}=\frac{2^2\times 20}{5}$ بڕی ناو کەوانەکە هەژمێربکە.

$=\frac{4\times 20}{5}$ تواناکان ئەژمێر بکە

$=\frac{80}{5}$ لێکدانبکە

$=16$ دابەشبکە.

هەوڵبدە بەهای $\frac{18-2\times 5}{15+3(-3)}$ هەژمێر بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە مامۆستا داوای لە ڤاڵا و لانا و سەروین کرد ئەم برەیە $\frac{8-3}{5-2}$ هەژماربکەن بەبەکارهێنانی بژمێر. هەریەکەیان بە ڕێگایەکی جیاواز بژمێریان بەکارهێنا.

ڤاڵا: 8 - 3 ÷ 5 - 2

لانا : (8 - 3) ÷ 5 - 2

سەروین: (8 - 3) ÷ (5 - 2)

تۆش بژمێر بەکاربهێنە و وەڵامەکەت بەراورد بکە لەگەڵ وەڵامەکانیان.

کامیان ڕەچاوی ڕیزبەندی کردارەکانی کردووە.

راهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەم وشانەی خوارەوە چی دەگەیەنێت بۆتۆ روونیبکەرەوە: ئاڵوگۆڕ، یەکتربەستن، بەشینەوە بەپێی هەردوو کرداری کۆکردنەوە و لێکدان بە هێنانەوەی نموونە باسیان بکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

2 پۆلینی ئەم دوو ژمارەیە $\frac{2}{3}$ و... -2.131331333 بکە بە هەموو ئەو ڕێگایانەی لە توانادایە.

هەر یەك لەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە بە دەربڕینی هۆی هەر هەنگاوێك.

3 $2(a+b)$ **4** $-3a+3a$ **5** $\frac{3(8+2)}{2}$

6 $\frac{7-1}{5-2}$ **7** $\frac{1}{4}(4\times5)$ **8** $-5(4y^2)$

9 بازرگانی ئەگەر هێمای گۆڕاوی a بۆقیستی ساڵانەی دڵنیایی لەسەر ئۆتۆمبیل بێت و هێمای گۆڕاوی m بۆقیستی مانگانە بێت، ئەوا ڕێسای $m=\frac{a}{12}+\frac{0.06a}{12}$ چۆنیەتی هەژمێرکردنی قیستی مانگانە دیاردەکات کە پێویستە بدرێت. روونیبکەوە کە دەتوانیت ئەم یاسایە بەم شێوەیە $m=\frac{1.06a}{12}$ دیاریبکەیت. هۆی هەر هەنگاوێك بڵێ.

جێبەجێکردن



شارەزاکە زیانەکانی ئوتومبیلەکە هەڵدەسەنگێنێ کە خۆی کێشاوە بە ئوتومبیلێکی تر.

هەژماری ئەم برانە بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

10 $5^2+8\div4-2$ **11** $(7-3^2)^2$

12 $\frac{5\times6\div3\times7}{12}$ **13** $2\left[14-3(6-1)^2\right]$

ڕاهێنانی جێبەجێکردن

ئەم ژمارانە پۆلینبکە.

14 $\sqrt{3}$ **15** $\frac{2}{5}$ **16** $1.0\overline{63}$ **17** π

18 $\frac{\sqrt{36}}{2}$ **19** $\frac{9}{3}$ **20** $\frac{15}{2}$ **21** $5.121121112...$

ئەم ژمارانە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

22 $\frac{13}{2}$ **23** $3.\overline{6}$ **24** 1.5 **25** $\sqrt{10}$

هەر بڕێك بە بەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژماربکە.

26 $16\div2\times6-1$ **27** $6\div3-(10-3)^2$

28 $30-3\times2+6\div3$ **29** $5\times(2-3)^2$

سیفەتی بەکارهێنراو بۆ هەر یەکە لەمانە دیاربکە.

30 $a(3b)=(3b)a$ **31** $(25x)y=25(xy)$

32 $(5+3)+2=5+(3+2)$ **33** $a+2-x=2-x+a$

34 $\frac{1}{a}\times a=1\ ;\ a\neq0$ **35** $\frac{3}{x}\times\frac{x}{3}=1\ ;\ x\neq0$

36 $-7+7=0$

37 $2x+(-2x)=0$

38 $1(3x)=3x$

39 $63=1\times 63$

40 $a(x^2+x)=ax^2+ax$

41 $2(3-x)=6-2x$

بەهای ئەم برانە بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی هەژمار بکە.

42 $3\times 2^2+3$

43 $6\div 3\times 2$

44 $2^2(2+3)+5$

45 $6\div(3-1)\times 5$

46 $-3\times 25+16$

47 $2^{(3-1)}+(3-1)$

48 $(2^2+1)+4\div 2$

49 $\frac{8-2}{3}+(2+1)$

50 $2\times 4+\frac{14}{5+2}$

بەرەنگاری

51 دەکرێ ژمارەیەك ڕێژەیی و ناڕێژەیی بێت لەهەمان کاتدا؟

بەستنەوە

52 ئایا دەتوانیت ژمارەی π لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنیت؟ ڕوونیبکەوە.

53 **ئامار** ڕۆژان دەیەوێت ناوەندی ئەم ژمارانە 8 ، 10 ، 14 ، 16 ئەژمێربکات کە لە بژمێرەکەیدا دایناوە بەم شێوەیە: $\boxed{8}\boxed{+}\boxed{10}\boxed{+}\boxed{14}\boxed{+}\boxed{16}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{=}$ و لە ئەنجامدا 36 ی دەستکەوت. ئایا ڕۆژان ڕاستی کردووە؟ پێویست بوو لە بژمێرەکەیدا چی دابنێ باسبکە؟

54 **دەروازەیەك لەسەر شارستانییەتی میزۆپۆتامیا (عێراق)** بابلییەکان ژمارە ڕێژەییەکانیان بۆ نزیککردنەوە لە ژمارە ناڕێژەییەکان بەکارهێناوە. و زانیویانە کە تیرەی چوارگۆشە دەکاتە $\sqrt{2}$ لێکبدرێت لە درێژی لایەکی، و ژمارەی 1.4142 یان بەکارهێناوە وەك بەهای $\sqrt{2}$ بەکارهێناوە و وایان داناوە کە ژمارەی 1.4142 نزیکە لە $\sqrt{2}$ بۆ کاری پێداویستیە هەژمارکردنەکانیان.

أ بژمێر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای $\sqrt{2}$.

ب ئایا ئەم بەهایەی دەستکەوتووە دەکاتە 1.4142 ؟

ج ئەو بەهایەی دەستتکەوتووە لە بژمێرەکەوە لەسەرکاغەز بینووسە، پاشان سەرلەنوێ بیخە ناو بژمێرەکە و هەژماری دووجاکەی بکە. ئایا ژمارەی 2 دەردەچێت؟ ڕوونیبکەوە.



جێبەجێکردن

55 یەکێك لە دەزگاکان مانگانە 2000 دینار بۆ هەر فەرمانبەرێك دەدات بە سیستمی دڵنیایی تەندروستی. ئەمەش نیوەی ئەو برە دەنوێنێت کە فەرمانبەرەکان بۆ هەمان مەبەست مانگانە دەیدەن، بڕی پارەی دراو لە ساڵێکدا بۆ دڵنیایی تەندروستی ئەو فەرمانبەرە چەندە لەلایەن فەرمانبەرەکەوە؟

دەروازەیەك لەسەر مێژوو

دۆڵی میزۆپۆتامیا دەکەوێتە نێوان هەردوو ڕووبارەی دیجلە و فوراتەوە، لەو شوێنەی کە هەردوو ڕووبارەکە سەرچاوە دەگرن تا یەك دەگرنەوە و دەڕژێنە ناو دەریای کەنداوی عەرەبی. بەو شوێنانە وتراوە میزۆپۆتامیا کە لەم دواییدا عەرەبەکان ئەو دۆڵەیان ناونا (*وادي الرافدين*) واتە دۆڵی هەردوو ڕووبارکە.

ڕوانین بۆ دواوە

هەژماری ئەم برانە بکە و وەڵامەکان بە سادەترین شێوە ئەگەر کرا بنووسە.

56 $\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}$

57 $\frac{6}{11}\times\frac{2}{3}$

58 $21\div\frac{7}{8}$

59 $10\div\frac{5}{6}$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

60 $3(x-5)=4$

61 $\frac{x}{3}+9=2$

62 $3x-5=x+12$

63 $\frac{1}{5}x-4=3(x-5)$

ڕوانین بۆ پێشەوە

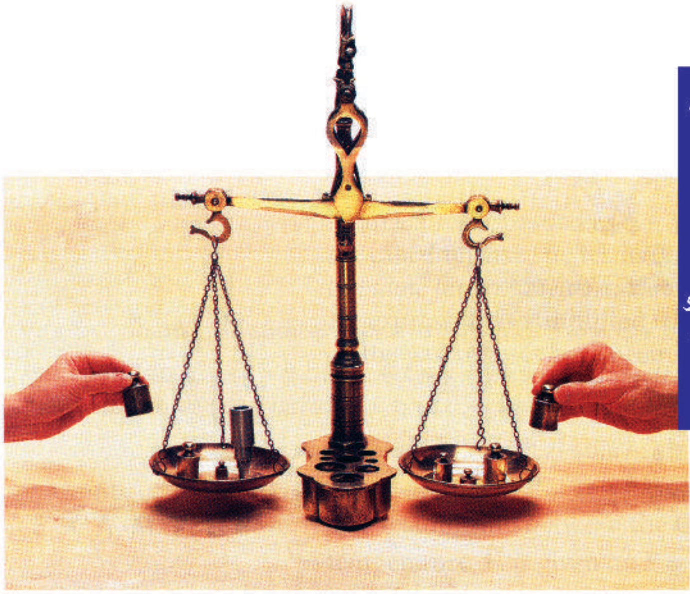
64 شیکارکردنی هاوکێشەکان وا دەکات کە پێویستی بەبەکارهێنانی هەموو جۆرە ژمارەکان بێت. شیکاری هاوکێشەی $x+7=5$ ژمارەیەکی سالبە سەرەڕای ئەوەی هاوکێشەکە تەنها ژمارەی موجەبی تێدایە، و شیکاری $2x=5$ ژمارەیەکی ڕێژەییە سەرەڕای ئەوەی هاوکێشەکە تەنها ژمارەی تەواوی تێدایە.

أ نموونەیەکی نوێ بۆ هاوکێشەیەك بهێنەرەوە جگە لە ژمارەی ناسالب ژمارەیەکی تری تێدانەبێت و بەڵام شیکارەکەی ژمارەی سالب بێت.

ب نموونەیەکی نوێ بۆ هاوکێشەیەك بهێنەرەوە کە جگە لە ژمارەی تەواو ژمارەیەکی تری تیانەبێ و بەڵام شیکارەکەی ژمارەی ناتەواو بێت.

وانەی 2

هاوكێشەكان Equations



بۆچی

دەتوانین شیكاری زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بەبەكارهێنانی هاوكێشەكان ئەنجام بدەین كە لە تەرازوو دەچێت. و هاوتایی وا دەكات كرداری یەكسانی لەگەڵ هەردوو تای تەرازووەكە ئەنجام بدەین. (یان هەر لایەكی هاوكێشەكە)

ئامانجەكان

- سیفەتەكانی یەكسانی دەناسێت و بە كاریاندێنێت
- هاوكێشە هێڵییەكان دەنووسێت و بە جەبری و بەڕوونكردنەوەیی شیكاریان دەكات
- هاوكێشە زۆر گۆڕاوەكان شیكاردەكات بە هەژماركردنی یەكێكیان بەپێی ئەوانی تر.

هاوكێشە **Equation** بریتییە لە یەكسانبوونی نێوان دوو بڕ گۆڕاوێك یان زیاتری تێدایە پێی دەوترێت نەزانراو **Unknown** .

$12x = 10$ هاوكێشەیەكی یەك گۆڕاوە كە ئەویش x ە.

$2x + 3y = 12$ هاوكێشەیەكی دوو گۆڕاوە كە بریتین لە x و y .

هەر ژمارەیەك پاسادانی هاوكێشەكە بكات بەلەجیاتیدانان (واتە بیگۆڕێت بۆ یەكسانبوونێكی ڕاست پاش دانانی ژمارەكە لەجیاتی نەزانراوەكە) پێی دەوترێت ڕەگی **Root** هاوكێشەكە.

ژمارەی $\frac{5}{6}$ بۆ نموونە ڕەگە بۆ هاوكێشەی $12x = 10$ چونكە بەدانانی ئەو ژمارەیە لەجیاتی نەزانراوەكە وادەكات یەكسانەكە تەواوبێت: $12 \times \frac{5}{6} = 10$

شیكاركردنی هاوكێشە بریتییە لە دۆزینەوەی كۆمەڵە ژمارەیەك كە ڕەگەكانی هاوكێشەكەن، ئەو كۆمەڵەیە پێی دەوترێت كۆمەڵە شیكاری هاوكێشەكە **Solution Set of equation** . دەشێت ئەو كۆمەڵەیە تەنها یەك دانەی تێدابێت و هەروەها دەشێت لەیەك دانە زیاتری تێدابێ و یانیش دەكرێ ناكۆتا دانەی تێدابێ. و دەشێت كۆمەڵەی شیكار هیچ دانەیەكی تێدانەبێت، واتە كۆمەڵەكە بەتاڵ **Empty Set** $\varnothing$ بێت.

سیفەتەكانی یەكسانبوون لە نێوان ژمارە ڕاستییەكان و سیفەتی لە جیاتیدانان بەكاربهێنە لە كاتی شیكاركردنی هاوكێشەكان.

سیفەتی یەكسانبوون Properties of Equality

سیفەتی وێنەدانەوە	$a = a$
سیفەتی هاوجێبوون	ئەگەر $a = b$ ئەوا $b = a$
سیفەتی تێپەڕبوون	ئەگەر $a = b$ وە $b = c$ ئەوا $a = c$
سیفەتی كۆكردنەوە	ئەگەر $a = b$ ئەوا $a + c = b + c$
سیفەتی لێدەركردن	ئەگەر $a = b$ ئەوا $a - c = b - c$
سیفەتی لێكدان	ئەگەر $a = b$ ئەوا $ac = bc$
سیفەتی دابەشكردن	ئەگەر $a = b$ ئەوا $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ كاتێك $c \neq 0$
سیفەتی لەجیاتیدانان	ئەگەر $a = b$ بە لەجیاتیدانانی b لە a . لە هەر دەستەواژەیەكی بیركاری دروستدا هەر بە دروستی دەمێنێتەوە.

شیكاركردنی هاوكێشەكان بە سادەكردنی بڕەكان و كۆكردنەوەی ژمارەكان دەستپێدەكات.

نموونە 1

جێبەجێکردن

پلەکانی گەرما

دوو جۆرە پێوەر هەیە بۆپێوانی پلەکانی گەرمی: پێوەری سەدی (Celsius) و پێوەری فەهرەنهایت (Fahrenheit) و پەیوەندی نێوان هەردوو پێوەرەکە برتییە لە $F=\frac{9}{5}C+32$ هێمای F پلەی گەرمییە بە فەهرەنهایت و C هێمای پلەی گەرمییە بە پلەی سەدی. لە راگەیاندنی کەش و هەوادا هاتووە کە پلەی گەرمی ئەمڕۆ 86 پلەیە لەسەر پێوەری فەهرەنهایتی. پلەی گەرمییەکە بە پێوەری سەدی چەندە؟

شیکار

$F=\frac{9}{5}C+32$	ڕێساکە
$86=\frac{9}{5}c+32$	بە دانانی 86 لەجیاتی F
$86-32=\frac{9}{5}C+32-32$	بە دەرکردنی 32 لە هەردوولای هاوکێشەکەبەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن
$54=\frac{9}{5}C$	سادەکردن
$\frac{5}{9}\times 54=\frac{5}{9}\times\frac{9}{5}C$	بە لێکدانی هەردوولای هاوکێشەکە لە $\frac{5}{9}$ بەبەکارهێنانی سیفەتی لێکدان
$30=C$	سادەبکە
$C=30$	سیفەتی هاوجێبوون بەکاربهێنە

نموونە 2

هاوکێشەی $2x+7=5x-9$ شیکاربکە.

شیکار

$2x+7=5x-9$	هاوکێشەکە
$2x+7-7=5x-9-7$	بە دەرکردنی 7 لە هەردوولا بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن
$2x=5x-16$	سادە بکە
$2x-5x=5x-16-5x$	بە دەرکردنی $5x$لە هەردوولا بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن
$-3x=-16$	سادە بکە
$\frac{-3x}{-3}=\frac{-16}{-3}$	بە دابەشکردنی هەردوولا بەسەر -3 دا بەبەکارهێنانی سیفەتی دابەش
$x=\frac{16}{3}$	سادە بکە

ساغبکەوە: $2\times\frac{16}{3}+7\overset{?}{=}5\times\frac{16}{3}-9$

$$\frac{32+21}{3}\overset{?}{=}\frac{80-27}{3}$$

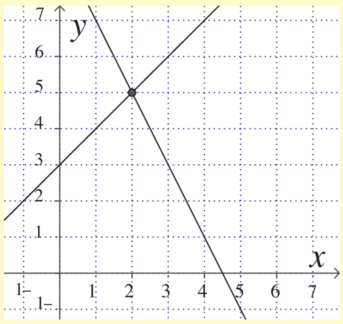
$$\frac{53}{3}\overset{?}{=}\frac{53}{3}$$ ڕاستە

کەواتە $x=\frac{16}{3}$ ڕەگی هاوکێشەکەیە

هەوڵبدە شیکاری هاوکێشەی $3x+12=-5x+24$ بکە و ساغکردنەوەی شیکارەکەش بکە بەلەجیاتیدانان.

چالاكی

دۆزینەوەی شیكاری هاوكێشەكان بە ڕوونكردنەوەیی
Exploring Graphic Solution Method



1. ئەو دوو بڕە یەكسانە كامانەن كە ئەم هاوكێشەیان لێپێكدێت $x+3=9-2x$ ؟
2. لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەكاندا وێنەی هەردوو ڕاستە هێڵی $y=x+3$ و $y=9-2x$ بكێشە.
3. بەهای پۆتانی سینی بۆ خاڵی یەكتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵەكە چەندە؟
4. بە لەجیاتیدانان پاسادانی بەهایەكە بكە، ئایا دەبێتە شیكاری هاوكێشەكە؟
5. ڕوونیبكەوە چۆن هاوكێشەی $2x+1=2-x$ بە ڕوونكردنەوەیی شیكاردەكەیت.

خاڵی چاودێری ✓

نموونە 3 هاوكێشەی $y=0.72x+3.65$ ، $y=3.24x-4.09$ بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.



شیكار

وێنەی ڕاستەهێڵی $y=3.24x-4.09$ و ڕاستەهێڵی $y=0.72x+3.65$ بكێشە بە بەكارهێنانی بژمێری ڕوونكردنەوەیی یان كاغەزی ڕوونكردنەوەیی و خاڵی یەكتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵەكە دیاربكە، پۆتانی سینی خاڵی یەكتربڕینەكە زۆر نزیكە لە ژمارە 3 و لەوانەیە 3.07 بێت. كەواتە شیكارەكە بە نزیكەیی دەكاتە 3.07 .

هەوڵبدە هاوكێشەی $2.24x-6.24=4.26x-8.76$ بە ڕوونكردنەوەیی شیكار بكە.

هاوكێشە پیتییەكان — Literal Equations

هاوكێشەی پیتی ئەو هاوكێشەیە كە دوو گۆڕاو یان زیاتری تێدایە. ئەو هاوكێشانە یاساكانی هەژمێركردنی ڕووبەر و قەبارەكان دەگرێتەوە.

نموونە 4

جێبەجێكردن
پزیشكی



پزیشكەكان یاسایەك بەكاردەهێنن بۆدەستنیشانكردنی بڕی ئەو دەرمانەی كە دەدرێتە منداڵەكان بەپێی ئەوەی دەدرێتە گەورەكان، ئەم یاسایەش بریتییە لە $c=\frac{a}{a+12}\times d$ كە c بڕی ئەو دەرمانەیە كە بە منداڵێك دەدرێت، a تەمەنی منداڵەكە بێت، d بڕی ئەو دەرمانەیە كە دەدرێتە گەورەیەك.
شیكاری ئەم هاوكێشەیە بكە بەپێی گۆڕاوی d (واتە ئەم گۆڕاوە بەپێی گۆڕاوەكانی تر بدۆزەوە).

$c=\frac{a}{a+12}\times d$	هاوكێشەكە
$c(a+12)=(a+12)\frac{a}{a+12}\times d$	سیفەتی لێكدان بەكاربهێنە
$c(a+12)=ad$	سادەبكە
$\frac{c(a+12)}{a}=\frac{ad}{a}$	سیفەتی بەشینەوە بەكاربهێنە
$d=\frac{c(a+12)}{a}$	سادەبكە

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

هاوکێشەی نموونە ٤ بەپێی گۆڕاوی a شیکار بکە.

خاڵی چاودێری ✔

دوو هاوکێشە هاوتا **Equivalent** دەبن ئەگەر هەمان شیکاریان هەبێت. لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی ساغبکەیتەوە دوو هاوکێشەی $\frac{9}{5}x + 32 = 86$ ، و $\frac{9}{5}x = 54$ هاوتان.

ڕاهێـــــــنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

سیفەتی بەکارهێنراو بۆ شیکاری ئەم هاوکێشانە دیاریکە.

1. $52 = -2.7x - 3$
2. $x + 2.2 = \frac{x}{5}$
3. $3x - 5 = 2x - 2$
4. باسبکە چۆن هاوکێشەیەکی هاوتای $4x - 7 = 4$ دەستدەکەوێت.
5. باسبکە چۆن هاوکێشەی $\frac{9(x-3)}{7} = \frac{2(x+3)}{7}$ شیکاردەکەیت بە ڕوونکردنەوەیی.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم هاوکێشانە شیکار بکەو شیکارەکانیش پاسادانبکە.

6. $4x + 12 = 20$
7. $\frac{x}{5} + 3 = 4$
8. $-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} = 2 - 3x$
9. $7 - 6x = 2x - 9$
10. هاوکێشەی $Ax + By = C$ شیکاربکە، کاتێك $B \neq 0$ بۆ هەژمێرکردنی y بەپێی گۆڕاوەکانی ترەوە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

11. $2x - 5 = 1$
12. $-2x - 7 = 9$
13. $5x - 3 = 12$
14. $20 = 6x - 10$
15. $4 - 5x = 19$
16. $3x + 1 = \frac{1}{2}$
17. $4x + 80 = -6x$
18. $7x = -2x + 5$
19. $5x + 3 = 2x + 18$
20. $4x - 3 = x + 7$
21. $\frac{1}{5}x + 3 = 2$
22. $\frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = -2$
23. $\frac{1}{2}x + 2 = 0$
24. $\frac{1}{3}x = -x + 4$
25. $x - 5 = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$
26. $-\frac{1}{3}x + 1 = \frac{3}{2}x - 1$
27. $\frac{2}{3}x + 9 = \frac{1}{2}x + 4$
28. $\frac{1}{4}x - 3 = 6x$

29 $\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}x-1$ **30** $\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=x-3$

ئەم هاوکێشانە شیکار بکە و شیکارەکە بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

31 $0.24x+1.1=2.56x-1.5$

32 $1.05x-4.28=+2.65x+4.1$

33 $0.67x-8.75=-0.48x+3.99$

34 $5.9(0.33x-1.33)=-1.03x-5.72$

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە بە هەژمارکردنی نەزانراوی دانراو لە نێوان دوو کەوانەی بەرامبەردا بەپێی نەزانراوەکانی تر.

35 $\frac{1}{2}bh=A$ (b)

36 $P=2l+2w$ (w)

37 $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ (r_2)

38 $A=\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$ (b_2)

39 $A=\frac{1}{2}h(b_1-b_2)$ (h)

40 $Y=\frac{u+1}{u+2}$ (u)

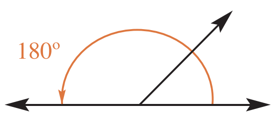
41 $ax+b=cx+d$ (x)

42 $ax+b=cx+d$ (d)

43 ئەگەر $y=4x+7$ هەبێت، لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆئەوەی هاوکێشەی $-2x+y=19$ شیکاربکەی.

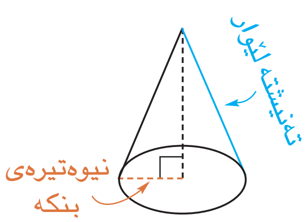
بەستنەوە

44 **ئەندازە** پێوانەی یەکێك لە دوو گۆشەی یەکتر پڕکەر دەکاتە دوو ئەوەندەی گۆشەکەی تر کە 45° ی بۆ زیادکرابێت. هاوکێشەیەك بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی هەردوو گۆشەکە.



بەرەنگاری

45 **ئەندازە** یاسای $A=\pi rs+\pi r^2$ ڕێدەدات بۆ هەژمێرکردنی ڕووبەری قووچەك کاتێ، A هێمای ڕووبەری قوچەکەکە بێت، r نیوەتیرەی بنکەکەی بێت و s درێژی تەنیشتە لێوارەکەی بێت، یاساکە بنووسە بە هەژمێرکردنی تەنیشتە لێوارەکەی s بەپێی ڕووبەر A و نیوەتیوەی بنکەکەی r .



ڕوانینێك بۆ دواوه

ئەم بڕانە هەژمێر بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

46 $3(2-(5-3)-7)+2$

47 $-(-5^2)^3$

ڕوانینێك بۆ پێشەوه

ئەم دەستەواژە بیرکاریانە چی دەگەیەنێت باسبکە.

48 $y > -5$

49 $-3 < x < 3$

50 $-1 \le y \le 1$

51 $x \ge -3$

وانەی 3

لاسەنگەکان Inequalities

بۆچی

دەتوانین زۆر لە پێداویستییەکانی ژیانی ڕۆژانە بەبەکارهێنانی لاسنگەکان ئەنجام بدەین. نموونەش بۆ ئەمە ڕێژەی چەوری کە پێویستە مرۆڤ لە خواردنیدا زیاد نەکات بۆ ئەوەی تووشی سەرئێشە نەبێت.



ئامانجەکان

- لاسەنگەی هێڵی بە یەك گۆڕاو دەنووسێت و بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاری دەکات.
- لاسەنگە هێڵیە ئاوێتەکان بە یەك گۆڕاوادا بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.

جێبەجێکردن

خواردن

یەك لە لێکۆڵینەوەکان دەریخستووە کە ئەو کەسانەی بڕی چەوری لە خواردنەکانیاندا کەمدەکەنەوە بۆ کەمتر لە 20% لە بەهای ئەو گەرمۆکە گەرمیەی دەیخۆن کەمتر تووشی سەرئێشان دەبن، ئەگەرهێمای c بۆ گەرمۆکەی گەرمی خواردنی تاکێك دابنرێت، پێویستە ژمارەی گەرمۆکەی چەوری F زیاتر نەبێت لە 20% ی c ئەمە بەڕێگای ڕستەی بیرکاری $F \le 0.2c$ دەردەبڕدرێن.

نموونەی ئەم جۆرە ڕستەیە پێیدەوترێت لاسەنگە **Inequality**.

بە شێوەیەکی گشتی هەر ڕستەیەکی بیرکاری ئەم هێمایانەی $(\le;\ \ge;\ <;\ >)$ تێدابێت بریتییە لە لاسەنگە.

بۆ شیکاری لاسەنگەکان، سیفەتەکانی لاسەنگە لە نێوان ژمارە ڕاستییەکاندا بەکاربهێنە.

سیفەتەکانی لاسەنگە Properties of inequality

سیفەتی کۆکردنەوە **Addition Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a+c \le b+c$
سیفەتی لێدەرکردن **Substraction Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a-c \le b-c$
سیفەتی لێکدان **Multiplications Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $ac \le bc$ کاتێك $c>0$
	، ئەوا $ac \ge bc$ کاتێك $c<0$
سیفەتی دابەشکردن **Division Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ کاتێك $c>0$
	، ئەوا $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$ کاتێك $c<0$

ئەم سیفەتانەی سەرەوە بە ڕاستی دەمێننەوە بە بەکارهێنانی هێماکانی تری لاسەنگە.

کۆمەڵەی شیکاری **Solution Set** لاسەنگە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە بە لەجیاتیدانانی لە لاسەنگەکەدا لاسەنگەکە ڕاست دەبێت.

بۆ نموونە دوو ژمارە ڕاستی $\frac{1}{2}$ ، -1 دوو شیکارن بۆ لاسەنگەی $6x+1<13$ ، چونکە بە لەجیاتیدانانی هەر یەکێك لەو دوو ژمارەیە لەجیاتی نەزانراوی x دوو لاسەنگەی ژمارەیی ڕاستمان دەداتێ.

$6x+1<13$	$6x+1<13$
$6\left(\frac{1}{2}\right)+1\overset{?}{<}13$	$6(-1)+1\overset{?}{<}13$
$3+1\overset{?}{<}13$	$-6+1\overset{?}{<}13$
$4\overset{?}{<}13$ ڕاستە	$-5\overset{?}{<}13$ ڕاستە

خاڵی چاودێری ✓ ئایا دەتوانیت هەندێ شیکاری تر بۆ لاسەنگەکەی پێشوو بدۆزیتەوە؟ بەلەجیاتی دانان ساغبکەوە.

نموونە 1

لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ شیکاربکە .

شیکار

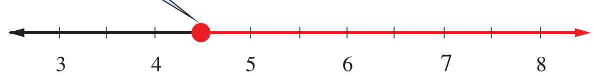
$4x-5\geq 13$	لاسەنگەکەیە
$4x-5+5\geq 13+5$	سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە
$4x\geq 18$	سادەکردن
$x\geq \frac{18}{4}=4.5$	سیفەتی دابەشکردن بەکاربهێنە

کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەکەی پێشوو بریتییە لە کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستیانەی بچووکترنین لە 4.5 .

هەوڵبدە لاسەنگەی $-4<7-3x$ شیکاربکە.

دەتوانی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی یەك گۆڕاو لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنی. ئەم وێنەی خوارەوە کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ دەنوێنێت.

بازنە بچووکە پڕەکە نیشانەی ئەوەیە کە 4.5 سەر بە کۆمەڵەی شیکارەکەیە.



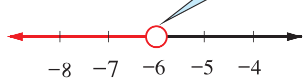
نموونە 2

لاسەنگەی $4-3x>16-x$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

$4-3x>16-x$	لاسەنگەکەیە
$4-3x+x>16-x+x$	سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە
$4-2x>16$	سادەکردن
$4-2x-4>16-4$	سیفەتی دەرکردن بەکاربهێنە
$-2x>12$	سادەکردن
$\frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$	سیفەتی دابەشکردن بەسەر ژمارەیەکی سالب بەکاربهێنە
$x<-6$	سادەکردن

بازنە بەتاڵەکە نیشانەی ئەوەیە کە -6 سەر بە کۆمەڵەی شیکار نییە .



هەوڵبدە لاسەنگەی $5-7b>8-4b$ شیکاربکە.

نموونە 3

جێبەجێکردن

ئەزموونەکان

نمرەی کۆتایی خوێندکار دیاریدەکرێت بە دوو نمرەی تاقیکردنەوە بە ڕێژەی دووسێیەك و ئەرکی ماڵەوە بە ڕێژەی سێیەك لە یەکێك لە خوێندگاکاندا. نمرەی سالار لە تاقیکردنەوەی مێژوودا 90 لە 100 بوو. **کەمترین نمرەی ئەرکی ماڵەوەکە پێویستە سالار وەریبگرێت چەندە بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 93 لە 100 کەمتر نەبێت؟**

شیکار

دەتوانیت پێدراوەکانی پرسیارەکە بەم شێوەیەی خوارەوە بنووسیت.

$$\text{نمرەی کۆتایی} = \frac{2}{3}\left(\text{نمرەکانی تاقیکردنەوە}\right) + \frac{1}{3}\left(\text{نمرەکانی ئەرکی ماڵەوە}\right)$$

یان $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ کە f نمرەی کۆتاییە، h نمرەی ئەرکی ماڵەوەیە بۆ ئەوەی f لە 93 کەمتر نەبێت پێویستە h شیکاری لاسەنگەی $93 \le \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ پێکبێنێت.

شیکاری ئەم لاسەنگەیە:

$93 \le \frac{1}{3}h + 60$	سادەبکە
$93 - 60 \le \frac{1}{3}h + 60 - 60$	سیفەتی لێدەرکردن بەکاربهێنە
$33 \le \frac{1}{3}h$	سادەبکە
$3 \times 33 \le 3 \times \frac{1}{3}h$	سیفەتی لێکدان بەکاربهێنە
$99 \le h$	سادەبکە

کەواتە، پێویستە نمرەی ئەرکی ماڵەوە لە 99 کەمتر نەبێت بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 93 کەمتر نەبێت.

چالاکی

دۆزینەوەی شیکاری لاسەنگەکان بە ڕوونکردنەوەیی
Exploring Inequalities Grayphically

1. لاسەنگەی $2x - 3 < 3$ شیکاربکە.
2. وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$ و $y = 3$ لە هەمان ڕووتەختی پۆتان بکێشە.
3. بەهاکانی گۆڕاوی x دیاربکە کەوا دەکات ئەو خاڵەی سەر بە ڕاستەهێڵی $y = 3$ بەرزتر بێت لەو خاڵەی کە دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$.
4. ڕوونیبکەرەوە چۆن وەڵامی پرسیارەکەی پێشوو یارمەتیت دەدات بۆ شیکاری لاسەنگەکە.
5. لاسەنگەی $3x + 2 > 5$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. هەنگاوەکان ڕوونبکەوە کە پێیان دەگەیتە شیکار.

خاڵی چاودێری ✓

سەرنجێکی ڕەخنەگرانە

ئایا ڕێگاکەی پێشوو بۆ شیکاری لاسەنگەی $2x - 3 > x + 4$؟ و هەروەها بۆ لاسەنگەی $4 \ge 3x + 1$ دەشێت؟ ئەمە ڕوونبیکەوە.

لاسەنگە ئاوێتەکان Compound Inequalities

ژوان ئەنجامی پشکنینی ڕێژەیی شەکری لە خوێنەکەی خۆیدا خوێندەوە، لەسەری نوسرابوو کە ئەم هێندە (s) پێویستە کەمتر نەبێت لە 750 ملیگرام لە لیترێکدا و زیاتر نەبێت لە 1100 ملیگرام لە لیترێکدا. کەواتە پێویستە s پاسادانی هەردوو مەرجی $s \ge 750$ و $s \le 1100$ بکات. واتە دەبێت شیکاری هاوبەش بۆ هەردوو لاسەنگەی $x \ge 750$ و $x \le 1100$ بێت.

کاتێك دوو لاسەنگە بە ئامرازی بەیەکبەستن «و»بەیەکتر دەبەسترێنەوە یا $\wedge$ **لاسەنگەیەکی ئاوێتەمان Compound Inequality** دەستدەکەوێت.

بۆ شیکارکردنی لاسەنگەیەکی ئاوێتە بە ئامرازی «$\wedge$» بەیەکبەستراون، دەستبکە بە شیکارکردنی هەریەکە لە دوو لاسەنگەکە بەجیا و شیکارە هاوبەشەکەیان وەربگرە. واتە کۆمەڵەی شیکاری دوو لاسەنگەی ئاوێتە بە ئامرازی بەکتربەستنی «و» بریتییە لە کۆمەڵەی یەکتربڕینی هەردوو کۆمەڵەی شیکاری دوو لاسەنگەکە هەریەکیان بەجیا.

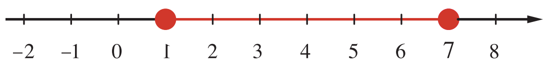
نموونـــــە 4

شیکاری $(3x-4\le 17)$ وە $(2x+1\ge 3)$ بکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

$3x-4\le 17$	و	$2x+1\ge 3$
$3x\le 21$	و	$2x\ge 2$
$x\le 7$	و	$x\ge 1$

کۆمەڵەی شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتەیە بریتییە لە کۆمەڵەی بەهاکانی x کە پاسادانی $1\le x\le 7$ دەکات. و لەسەر تەوەری ژمارەکان بەم شێوەیە دەنوێنرێت.



بەشێوەیەکی گشتی دەتوانی $(x>a)\wedge(x<b)$ بە شێوەی $a<x<b$ دەربڕیت.

هەوڵبدە شیکاری$(x-5>-12)\wedge(-2x+5\ge 3)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە. جۆرێکی تری لاسەنگە ئاوێتەکان کە بە ئامرازی «یان» دوو لاسەنگەکە دەبەسترێنەوە.

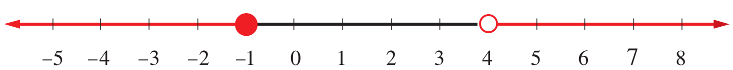
کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی ئاوێتە کە بە ئامرازی« $\vee$» بەستراونەتەوە بریتییە لە یەکگرتنی هەردوو کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکان هەریەکەیان بەجیا.

نموونـــــە 5

شیکاری $(3x+2\le -1)$ یان $(5x+1>21)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

$3x+2\le -1$	یان	$5x+1>21$
$3x\le -3$	یان	$5x>20$
$x\le -1$	یان	$x>4$



هەوڵبدە شیکاری $(7x+1>36)\ \vee$ ٬ $(2x\le 5)$ و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. هەنگاوەکانی نواندنی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ لەسەر تەوەری ژمارەکان ڕوونبکەوە.

2 کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ و کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7\ge 0$ بەچی جیاوازن؟ کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ و کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7<0$ بەچی جیاوازن.

3 ئایا هەردوو لاسەنگەی $x<16$ و $-x>-16$ هاوتان؟ ڕوونیبکەوە.

4 چۆن دەستەواژەی « x ژمارەیەکی سالب نییە» بەبەکارهێنانی ئامرازەکانی لاسەنگە دەنووسیت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5 لاسەنگەی $3x+1<13$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

6 لاسەنگەی $a+4<4a-11$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

جێبەجێکردنەکان

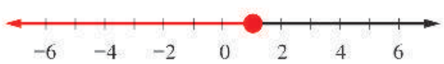
7 ئەزموونەکان نمرەی کۆتایی خوێندکار لە یەکێك لە خوێندگاکاندا بەیەکگرتنی نمرەی ئەزموونەکان بە ڕێژەی $\frac{3}{4}$ و نمرەی کۆششی ڕۆژانە بە ڕێژەی $\frac{1}{4}$ دیاردەکرێت. ئەگەر نمرەی کارزان لە کۆششی ڕۆژانەدا 92 لە 100 بێت ئەوا بەکەمترین نمرەی کارزان پێویستە وەریبگرێت لە ئەزموونەکاندا بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 80لە 100 کەمتر نەبێت چەندە؟

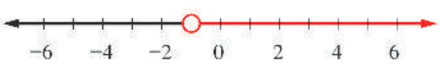
8 شیکاری لاسەنگە ئاوێتەی $(2x+3<15)\wedge(3x-7\ge -13)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

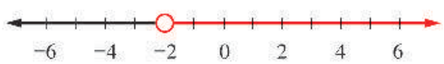
9 شیکاری لاسەنگە ئاوێتەی $(4x-6<14)\vee(2x+4\le -10)$ بکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

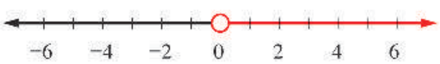
ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لاسەنگەیەك بنووسە بگونجێت لەگەڵ ئەو شیکارەی لەسەر تەوەری ژمارەکان نوێنراوە.

10 

11 

12 

13 

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

14 $5x<10$

15 $-5x>10$

16 $-5x<-10$

17 $a+4<10$

18 $\frac{1}{2}a-1\ge -15$

19 $\frac{1}{5}b-2\le 28$

20 $-x+8<41$

21 $-5x-15\le 60$

22 $\frac{y}{2}\le 10$

23 $-\frac{y}{32}<2$

24 $-6(b+4)<12$

25 $6-(4a-3)\ge 8$

26 $4y-12>7y-15$

27 $3(4y-5)<8y+3$

28 $-4x-3<-6x-17$

29 $-5(3x+2)\ge 4(x-1)$

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە و کۆمەڵە شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

30 $(x<2)$ و $(x>-4)$

31 $(x>2)$ و $(x>-4)$

32 $(x>2)$ یان $(x>-4)$

33 $(x<2)$ یان $(x>-4)$

34 $x > 2$ و $x < -4$ **35** $x < 2$ و $x < -4$

36 $x < 2$ یان $x < -4$ **37** $x > 2$ یان $x < -4$

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە، کۆمەڵەی شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

38 $n - 3 > 12$ و $n + 4 < 16$

39 $y + 4 > 7$ و $y - 2 < 4$

40 $x - 2 < 2$ یان $x + 7 > 4$

41 $x - 1 > 3$ یان $x + 8 < 5$

42 $2(x+6) > -4$ و $-9x \geq -81$

43 $4(y-3) \leq -8$ و $-5y < 40$

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە، کۆمەڵەی شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

44 $-4x \leq -20$ یان $20 - 3x \geq 11$

45 $5 - 4x \geq 17$ یان $14 - 3x \leq 2$

46 $8x \leq 3x - 15$ یان $2x > 7x - 10$

47 $\frac{1}{2}(16 - 4x) \geq 0$ یان $2x - 7 < 5x + 8$

48 شیکاری لاسەنگەی $-2a \leq 3x + a < 10$ بکە بە هەژماری بەهای نەزانراوی x بەپێی گۆڕاوەکانی تر.

بەرەنگاری

جێبەجێکردنەکان

49 **کاری خێرخوازی** یەکێك لە دامەزراوە خێرخوازەکان بڕیاریدا کە ڕاکێشانێکی خێرخوازی ئەنجامبدات لەسەر ئوتومبیلێك کە یەکێك لە کۆمپانیاکان بەخشیبووی. پێشبینی دامەزراوە خێرخوازەکە 1250 بلیت بە لایەنی کەمەوە بفرۆشێتەوە بە هیوای دەستکەوتنی 210 000 000 دینار.

کەمترین نرخ بۆ بلیتێك چەندە ئەگەر بزانیت تێچوونی ڕاگەیاندن 15 000 000 دینار بێت.



50 تێچووی بەرهەمهێنانی کاڵایەکی دیاریکراو بریتییە لە $C = 40x + 868$ و داهاتی فرۆشتن بریتییە لە $R = 54x$ ، هێمای x بریتییە لە ژمارەی یەکەکانی بەرهەمهێنراو، C هێمای تێچوونی بەرهەمی ئەم یەکانەیە.

أ لاسەنگەیەك بنووسە دەستکەوتی قازانج دەرببڕێت.

ب بەلایەنی کەمەوە دامەزراوەکە پێویستە چەند یەکە بفرۆشێت بۆ ئەوەی زەرەر نەکات؟

ج لاسەنگەکەی پێشوو بکە بە ڕوونکرنەوەیی شیکاربکە.

ڕوانینێك بۆدواوە

شیکاری ئەم هاوکێشە پیتیانە بکە بە هەژمێرکردنی نەزانراوی ناو دوو کەوانەکە بەپێی نەزانراوەکانی تر.

51 $A = p + prt$ (t)

52 $SA = 2ab + 2ac + 2bc$ (a)

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

53 دوو ژمارە دیاربکە کە بەهای ڕووتی هەریەکەیان بکاتە 4.

وانەی
4

هێزەکان و ڕەگەکان

Powers and Radicals

ئامانجەکان

- بەهای بڕێك هەژمێردەکات کە هێزی تێدابێت.
- ئەو برانەی هێزیان تێدایە سادەدەکات بەبەکارهێنانی یاساکانی هێز.



بۆچی

زۆرجار هێزەکان لە جێبەجێکردنە جیاوازەکاندا دەبینین. وەك چۆن لەفیزیادا، لەو چەقە هێزەی تووشی سواربوویەك دەبێت لەسەر چەرخێکی خێرا لە شاری یاری. دەکرێت ئەمە دەرببڕین بەبەکارهێنانی هێزەکان.

جێبەجێکردنەکان
فیزیا

لەو یاریانەی کە زیاتر خەڵك پێی خۆشە لە شاری یاریدا، ئەو چەرخەیە کە دەسوڕێتەوە بە خێراییەکی زۆر بە دەوری تەوەرەیەکدا، کە دەبێتە هۆی دروستبوونی چەقەهێز. دەکرێت ئەو هێزە دەرببڕێت بەم ڕێسایەی خوارەوە.

$$A = 4\pi^2 rT^{-2}$$

A هێمای چەقەهێز بێت
r نیوەتیرەی چەرخەکە بێت.
T کاتی پێویست بێت بۆ تەواوکردنی خولێکی تەواو

پێشتر مامەڵەت کردووە لەگەڵ هێمای a^n و پێی دەوترێت هێزی ژمارەی **Power** a بە توانی n، واتە a **بنچینەیە Base**، و n **توانە Exponent** و a^n دەخوێنرێتەوە a توان n.

هێزی ژمارەیەکی ڕاستی Power of a Real Number

ئەگەر a ژمارەیەکی ڕاستی بێت ئەوا :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ \text{جار}}$ (n جار) کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی مووجەب بێت.

$a^n = 1$ کاتێك $n = 0$ کەواتە $a^0 = 1;\ a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت و $a \neq 0$.

ناکرێت ژمارەی a بکاتە سفر لە بڕی a^0 چونکە 0^0 پێناسە نەکراوە. نموونەی 1 بۆمان ڕووندەکاتەوە کە چۆن پێناسەی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ بەکاردێت.

نموونە 1

بە گەڕانەوە بۆنموونەی چەقەهێز، هەژمێری تاوادانی ئەو هێزە بکە، کە سواربوویەك لە چەرخێکدا دەسوڕێتەوە نیوەتیرەکەی 6m بێت بە خێرایی یەك خول لە دوو چرکەدا.

شیکار

بەهای بڕی $A = 4\pi^2 rT^{-2}$ هەژمێر بکە کاتێك $T = 2$ ، $r = 6$ ، ئەمەت دەستدەکەوێت.

$$A = 4\pi^2 rT^{-2} = 4\pi^2(6)(2)^{-2} = \frac{24\pi^2}{2^2} = \frac{24\pi^2}{4} = 6\pi^2 \approx 59.2$$

هەوڵبدە

هەژماری تاوادانی ئەو هێزە بکە کە سواربوویەك بۆ یەك خول لە 5 چرکەدا دەسوڕێتەوە لە چەرخێکدا نیوەتیرەکەی 6 مەترە.

چالاکی

دۆزینەوەی سیفەتەکانی هێز Exploring Properties of Exponents

1. دووبارە $a^3 \times a^5$ بنووسە وە بە شێوەی هێز بە ڕێگای هەڵوەشاندنەوەی هەریەك لە هەردوو هێزەکە و دووبارە کۆکردنەوەی کۆڵکەکان. ئەو کردارە کامەیە کە دەتوانیت بیکەیت لەسەر هەردوو توانەکە بۆ ئەوەی هەمان ئەنجامت دەستبکەوێت؟
2. دووبارە بڕی $(a^3)^5$ بە شێوەی هێز بنووسەوە بە ڕێگای هەڵوەشاندنی هەردوو هێزەکە و دووبارە کۆکردنەوەی کۆڵکەکان. ئەو کردارە کامەیە کە دەتوانیت بیکەیت لەسەر هەردوو توانەکە بۆ ئەوەی هەمان ئەنجامت دەستکەوێت؟
3. چۆن بڕی $(a^3 \times a^7)^2$ بە سادەترین شێوە دەنووسیت بە شێوەی هێز، بێ هەڵوەشاندنەوەی هێزەکان. ئەمە ڕوونبکەوە.

خاڵی چاودێری ✓

ئەو چالاکییەی سەرەوە یارمەتیت دەدات بۆ بەدەستهێنانی ئەم سیفەتانەی خوارەوە بۆ هێزەکان کاتێك $a \neq 0$ ، $b \neq 0$

سیفەتەکانی هێز $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ **Properties Exponents**

لێکدانی هێزەکان	Product of Powers	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
دابەشبوونی هێزەکان	Divide of Powers	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
هێزی هێزەکان	Power of a Power	$(a^m)^n = a^{mn}$
هێزی ئەنجامی لێکدان	Power of a Product	$(ab)^n = a^n \times b^n$
هێزی ئەنجامی دابەشکردن	Power of a Quotient	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ، $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

لەم وانەیەدا وای دادەنێین هەموو ژمارە بەکارهێنراوەکان بۆ بنچینەی هێزی توان سالب بریتیە لە ژمارەی جیاواز لە «سفر».

نموونە 2

بڕی $3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$ سادەبکە. ئەنجام بەبەکارهێنانی هێزەکانی توانی موجەب بنووسە.

شیکار

	بڕەکەیە
$3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$	بڕەکەیە
$= 3(-2)x^2x^3y^{-2}y^{-4}=$	سیفەتی ئاڵوگۆڕ لە لێکدان بەکاربهێنە
$= -6x^{3+2}y^{-2+(-4)}$	سیفەتی لێکدانی هێزەکان بەکاربهێنە
$= -6\frac{x^5}{y^6}$	سادەکردن و بەکارهێنانی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

هەوڵبدە

بڕی $2z(3x^2)(5z^{-3})$ سادەبکە پاشان ئەنجامەکە بە بەکارهێنانی هێزەکانی توان موجەب بنووسە.

شیکارکردنی پرسیارەکان **بەدوای شێوازێکدا بگەڕێ** سەرنج بدە لەوەی لە هێزی ژمارەی سالب ڕوودەدات.

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$
$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$
$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

تێبینی بکە هێزی ژمارەی سالب بریتییە لە ژمارەیەکی موجەب کاتێک توانەکە جووت بێت و دەکاتە ژمارەیەکی سالب کاتێک توانەکە تاک بێت.

پێویستە ئاگاداری ئەوە بیت کە بنچینەی سالب و توانی سالب تێکەڵ نەکەیت.

توانی جووت	**توانی تاک**
$(-2x)^{-2}$	$(-2x)^{-3}$
$= \frac{1}{(-2x)^2}$	$= \frac{1}{(-2x)^3}$
$= \frac{1}{(-2)^2 x^2}$	$= \frac{1}{(-2)^3 x^3}$
$= \frac{1}{4x^2}$	$= \frac{1}{-8x^3} = -\frac{1}{8x^3}$

نموونە 3 بڕی $\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4$ سادەبکە. ئەنجامەکە بە توانی موجەب بنووسە.

شیکار

$\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4 = \frac{(-y^7)^4}{(2x^{12}y^3)^4}$ سیفەتی هێزەکانی ئەنجامی بەشکردن بەکاربهێنە

$= \frac{y^{28}}{16x^{48}y^{12}}$ سیفەتی هێزی هێز بەکاربهێنە

$= \frac{y^{28-12}}{16x^{48}}$ سیفەتی دابەشبوونی هێز بەکاربهێنە

$= \frac{y^{16}}{16x^{48}}$ سادەبکە

هەوڵبدە بڕی $\left(\frac{-3x^2y^5}{2y^2x^7}\right)^3$ سادەبکە و ئەنجامەکە بە توانی موجەب بنووسە..

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە هەریەکە لە a ، b ، c بدۆزەوە کاتێک $x^{-3}y^4 = (x^{-2}y^3z^2)(y^az^bx^c)$.

Radicals ڕەگەکان

دەتوانیت ئەو هێزانەی توانەکانیان ڕێژەیین بە شێوەیەکی تر بنووسیت کە ڕەگەکان لەخۆبگرێت.

بڕی $a^{\frac{1}{3}}$ دەکاتە $\sqrt[3]{a}$ چونکە $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$. ئەم پەیوەندییە ڕاست دەبێت بۆ هەموو هێزێک کە توانی ڕێژەیی هەبێت.

واتە دەتوانیت بڕی $a^{\frac{2}{3}}$ بە چەند شێوەیەک وەک لە خوارەوە دێت بنووسیت.

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$$

Powers With Rational Exponents   **ئەو هێزانەی کە توانی ڕێژەییان هەیە**

ئەگەر a ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت ئەوا :

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ کاتێک n ژمارەیەکی تەواوی موجەبە و گەورەترە لە 1 .

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ کە m ، n دوو ژمارەی تەواوبن و n موجەب بێت.

ئەم نموونەیەی خوارەوە پێناسەکەی سەرەوە ڕووندەکاتەوە.

نموونە 4

هەژمێری بەهای هەریەکە لەم دوو بڕەیە $16^{\frac{1}{4}}$ وە $27^{\frac{4}{3}}$ بکە.

شیکار

$$16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4\times\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

$$27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^{3\times\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$$

وەڵامەکەت بەبەکارهێنانی بژمێر پاسەدانبکە.

هەوڵبدە **هەژماری بەهای هەریەکە لەم دوو بڕەیە $36^{\frac{3}{2}}$ و $64^{\frac{1}{3}}$ بکە.**

جێبەجێکردنەکان
پزیشکی

پزیشکەکان بۆ خەمڵاندنی ڕووبەری گشتی مرۆڤ ڕێسایەك بەکاردەهێنن بە پشتبەستن بە درێژی و کێش، ئەوەش بۆ هەژمێری بڕی هەندێك دەرمان کە دەیدرێتێ و ڕێساکە ئەمەیە $S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$ کە S ڕووبەری گشتییە بە مەتر دووجا، W کێشە بە کیلۆگرام و H درێژییە بە سانتیمەتر.

نموونە 5

هەژمێری ڕووبەری گشتی مرۆڤێك بکە کێشەکەی 57.2kg و درێژییەکەی 152.5cm بێت.
وەڵامەکەت بنووسە بۆ نزیکترین بەشی دەیی لە مەتر دووجا.



شیکار

$$S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$$
$$= 0.007184 \times (57.2)^{0.425} \times (152.5)^{0.725}$$
$$\approx 1.54$$

بەم پێیە ڕووبەری گشتی ئەو مرۆڤە بە نزیکەیی دەکاتە 1.5m^2 .

هەوڵبدە هەژماری ڕووبەری گشتی مرۆڤێك بکە کە کێشەکەی 62.3kg و درێژی 180cm بێت. وەڵامەکە بنووسە بۆنزیکترین بەشی دەیی لە مەتر دووجادا.

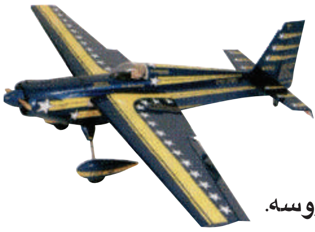
ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. ڕوونیبکەوە بۆچی ئەم دوو بڕە یەکسان نین $a^5 \times a^3$ و $(a^5)^3$.
2. ڕوونیبکەوە بۆچی ئەم دوو بڕە یەکسان نین ab^3 و $(ab)^3$
3. ڕوونیبکەوە چۆن هەژمێری 5^{-2} دەکەیت.
4. ڕوونیبکەوە چۆن $4^{\frac{3}{2}}$ هەژمار دەکەیت بەبەکارهێنانی پێناسەی هێزەکان کە توانی ڕێژەییان هەیە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

جێبەجێکردنەکان



5 **فیزیا** هەژمێری تاودانی چەقهێزی نموونەی (سامپل) فرۆکەیەك بکە کە دەسوڕێتەوە بە خێرایی یەك خول لە چرکە و نیوێکدا بە دەوری تەوەرەیەکدا کە 3m لێوەی دوورە.

ئەمانە سادەبکە. وەڵامەکان تەنها بەبەکارهێنانی توانی موجەب بنووسە.

6 $a^4 \times a^2$ **7** $\frac{x^9}{x^3}$

8 $(y^3)^6$ **9** $(a^3b^7)^4$

10 $(y^5y^{-2})^4$ **11** $\left(\frac{-2x^3y}{5x^7}\right)^2$

12 $\left(\frac{a^3b^{-1}}{a^{-2}b^2}\right)^{-2}$ **13** $\left(\frac{1}{x^{-1}y^3z^0}\right)^{-1}$

هەژماری ئەم بڕانە بکە.

14 $(100)^{\frac{1}{2}}$ **15** $(9)^{\frac{3}{2}}$ **16** $(27)^{\frac{1}{3}}$ **17** $(64)^{\frac{2}{3}}$

18 **پزیشکی** بەبەکارهێنانی بژمێر هەژمێری ڕووبەری کەسێك بکە کێشەکەی 53.64kg و درێژییەکەی 167.64cm بێت، وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆنزیکترین بەش لە سەدە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە هەژمار بکە.

19 3^0 **20** 9^0 **21** $(5a)^0$ **22** $(2^52^3)^0$

23 6^{-1} **24** 4^{-2} **25** $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ **26** $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

27 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ **28** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ **29** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ **30** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

31 $(49)^{\frac{1}{2}}$ **32** $(27)^{\frac{2}{3}}$ **33** $(64)^{\frac{4}{3}}$ **34** $(25)^{\frac{3}{2}}$

35 $(36)^{\frac{6}{4}}$ **36** $8^{\frac{2}{6}}$ **37** $-(64)^{\frac{2}{3}}$ **38** $(81)^{-\frac{3}{2}}$

ئەم بڕانە سادەبکە. وەڵامەکان تەنها بە توانی موجەب بنووسە.

39 y^5y^2 **40** $-2b^3b^5$ **41** $\frac{m^9}{m^5}$ **42** $\frac{bb^4}{b^2}$

43 $\frac{x^2y^{-5}}{x^4}$ **44** $\frac{x^5m^2}{xm^{-4}}$ **45** $\left(\frac{-2y^2}{x^3}\right)^7$ **46** $\left(\frac{2b^4}{d^2}\right)^3$

47 $\left(\frac{3x^4}{y^{-2}}\right)^{-1}$ **48** $\left(\frac{15xy^3}{3y^2}\right)^{-1}$

49 $\left(\frac{2x^{-3}}{(2x)^3}\right)^{-1}$ **50** $\left(\frac{-7y^{-2}}{x^5}\right)^6$

51 $-2y^3(5xy^4)$ **52** $(6x^5)(3x^5)(x^0)$

53 $(-5m^4m^5)^2$ **54** $(-3x^2y^7)^3$

55 $\left(\frac{-2b^5y^{-1}}{m^3}\right)^3$ **56** $\left(\frac{3b^2y^3}{b^{-1}}\right)^{-5}$

57 $\left(\frac{5b^2x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-1}$ **58** $\left(\frac{x^{-2}y}{b^{-1}}\right)^5$

59 $\left(\frac{4b^2y^{-3}}{b^{-1}y^2}\right)^2$ **60** $\left(\frac{15b^2x^{-2}}{-3bx^{-3}}\right)^{-2}$

61 $(2x^4y)^3$ **62** $(3xb^{12})^3$

63 $(x^{-3}y^{-1})(x^{-3}y^0)^2$ **64** $(x^{-3}y^2)(-2x^3y^7)^{-3}$

65 $\left[\frac{(x^3y^5)^2}{x^5y^2}\right]^{-1}(x^{-3}y^0)^2$

بۆ هەژمارکردنی بەهای ئەم بڕانە بژمێر بەکاربهێنە.

66 $12^{6.05}+8.8^{3.24}$ **67** $3.3^{2.7}-5^{1.9}+0.63^{0.95}$

68 $0.005^{21.53}+9.05^{0.034}$ **69** $71.33^{0.44}+478.2^{0.4}$

70 $11.7^6+29.3^{1.23}-6^{-2.2}$ **71** $89^{3.5}-5.25^{9.25}+324^{0.05}$

بەرەنگاری

72 ڕوونیبکەوە $y^{a-b}=\frac{1}{y^{b-a}}$ ، کە $y\neq 0$

73 ڕوونیبکەوە $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x-y}=-\frac{1}{xy}$

بەستنەوە

74 ئەندازە ڕێسای $h=\frac{3}{\pi}Vr^{-2}$ کە h بەرزی قووچەکێکمان بەپێی قەبارەکەی V و نیوەتیرەی بنکەکەی r دەداتێ.

أ هەژماری بەرزی قوچەکێك بکە قەبارەکەی 200cm^3 و نیوەتیرەی بنەکەکەی 4cm .
وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە دە بنووسە.

ب ڕێساکەی سەرەوە بنووسە بەبەکارهێنانی تەنها توانی موجەب.

جێبەجێکردنەکان

75 ئەندازەی بیناسازی هاوکێشەی $F=5\times10^{-3}r^4l^{-2}$ ئەوپەڕی باری ئەستوونی بینایەکمان بە تەن دەداتێ کاتێك F ئەوپەڕی بار بێت بەتەن و l بەرزی ئەستوونە کەبێت بە مەتر و r نیوەتیرەی بنکەی ئەستوونەکە بێت بە سانتیمەتر.

أ هەژمێری ئەوپەڕی باری ئەستوونێك بکە بەرزیەکەی 2m و نیوەتیرەی بنکەکەی 50cm .

ب ڕێساکەی پێشو بەبەکارهێنانی توانی موجەب بنووسە.

کیمیا تیشکدانەوەی پلۆتۆنیۆم *Plotonium* زۆر بە هێواشی کەم دەکات. ڕێژەی سەدی پلۆتۆنیۆمی ماوە (A) پاش x ساڵ دیاریدەکرێت بەم ڕێسایەی خوارەوە.
$A=100\times\left(0.5^{\frac{x}{24360}}\right)$ ڕێژەی سەدی پلۆتۆنیۆمی ماوە دیاریبکە پاش.

76 100 ساڵ **77** 500 ساڵ **78** 1000 ساڵ **79** 5 000 ساڵ

فیزیا پەستانی هەوا کەم دەبێتەوە بە بەرزبوونەوە لە ڕووی ئاستی دەریا. ئەم پەستانە دیاریدەکرێ بەپێی ڕێسای $P=14.7(10)^{-0.000064a}$ کە a بەرزییە لە ڕووی دەریا بە مەتر و p پەستانی هەوایە بە ملیمەتری جیوە.

80 پەستانی هەوا لە شارێکدا دەکاتە چەند کە 1610m لە ڕووی ئاستی دەریا بەرزە.

81 پەستانی هەوا لە چیای ئیڤەریست چەند دەبێت کە بەرزیەکەی لە ڕووی دەریاوە 8848m ـە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە. کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

82 $x<1$ و $x>-3$

83 $x>\frac{1}{2}$ و $x>-\frac{1}{4}$

84 $x<1$ یان $x>-3$

85 $x>\frac{1}{2}$ یان $x>-\frac{1}{4}$

هەژمێری ئەم برانە بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

86 $2(3-1)+6\div 3\div 2$

87 $3(9-12)-2(7-3)-1$

88 $3\times 5^2-4(5-8)^2\div 3$

89 $(5-3)^{\frac{10-8}{13-12}}$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

90 **وەچەکان** دایك و باوکت نەوەی یەکەمن لە وەچەکانت (باوانت)، ئەو کاتە هەردوو باپیرە و هەردوو داپیرە (نەنك) دەبنە نەوەی دووەم. بەڵام نەوەی سێیەم 4 باپیر و 4 داپیر دەگرێتەوە و هەروەها. ڕێسایەك بنووسە کە ڕێگات پێدەدات بە هەژماری وەچەکان لە n نەوە. هێزەکان بەکاربهێنە لە نووسینی ئەم ڕێسایە.

وانەی 5

شیکارکردنی سیستمی هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان

Solving Linear Systems by Substitution



بۆچی

زۆرجار پێویستت بە شیکارکردنی سیستمێك دەبێت کە لەدوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە و وەڵامی تەواوت دەداتێ بەبێ نزیککردنەوە وەك فرۆشیارێك لە بازاردا پێویستی بە دیاریکردنی نرخی هەر کاڵایەك هەیە بەوردی بۆ ئەوەی قازانجی پێویستی دەستبکەوێت.

ئامانجەکان

- سیستمێك کە لە دوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاردەکات.

لە پۆلی نۆهەمدا فێری سیستمی هاوکێشە هێڵیەکان بوویت و هەڵسایت بە شیکارکردنی هەندێکیان. و لەم پۆلەدا فێری چەند ڕێگایەك دەبیت بۆ شیکارکردنی ئەم جۆرە سیستمانە. و هەروەها لەسەرەتادا فێری ڕێگای لەجیاتیدانان دەبیت.

چالاکی

دۆزینەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان | **Exploring Substitution**

جێبەجێکردنەکان: پێشبرکێی ئۆتۆمبێل

پێشبرکێی ئوتومبیلەکان لەشاری سبرنغ لە وولاتە یەکگرتووەکانی ئەمریکا ئەنجامدەدرێت یەکێکە لە گرنگترین پێشبرکێی ئوتومبیلەکان. لەم پێشبرکێیەدا هەر ئوتومبێلێك دوو شوفێری لێیدەخورێت و هەریەك لەو شوفێرانە چەند خولێك ئەنجام دەدەن. تیپی ستیف و مایکل 157 خولیان ئەنجامدا، ئەگەر مایکل 21 خولی لە ستیف کەمتر ئەنجام دابێت، ئایا هەریەکەیان چەند خولی ئەنجامداوە؟

1. بە نووسینی هاوکێشەکان دەستپێبکە بۆ ئەوەی نموونەیەکی بیرکاری بۆ شیکاری پرسیارەکە بدۆزیتەوە. نەزانراوی x هەڵبژێرە بۆ نواندنی ژمارەی خولەکانی کە ستیف ئەنجامیداوە و نەزانراوی y هەڵبژێرە بۆ نواندنی ژمارەی خولەکان کە مایکل ئەنجامیداوە.

   سستەمێکی دوو هاوکێشەیی هێڵیت بە دوو نەزانراو x ، y دەست دەکەوێ $\begin{cases} x + y = 157 \\ y = x - 21 \end{cases}$

2. ڕێگای **خەملێنە و ساغبکەوە** بۆ دۆزینەوەی بەهای x ، y بەکاربهێنە کە دەبنە شیکاری سستەمی دوو هاوکێشە. **شیکاری پرسیار**

3. سەیری هاوکێشەی دووەم بکە $y = x - 21$ ، ئەم زانیارییە دەربارەی y چۆن بەکاردەهێنیت لە هاوکێشەی یەکەمدا؟

4. لەبەر ئەوەی $y = x - 21$، پێویستە لە هاوکێشەی یەکەمدا لە جیاتی y بەهای $x - 21$ دابنێیت پاشان هاوکێشەی دەستکەوت بۆ دۆزینەوەی بەهای y شیکاربکە.

5. لە هاوکێشەی دووەمدا بەهای نەزانراوی x دابنێ بۆ هەژماری بەهای y .

6. بەهای x و y بەراوردبکە لەگەڵ ئەو دوو بەهایەی لە ڕێگەی بخەملێنەو ساغبکەوە دەستتکەوتووە. ئایا ئەم دوو ئەنجامە جووتن؟ ڕوونیبکەوە. **خاڵ چاودێری** ✓

ئەگەر بەهای یەکێك لەدوو نەزانراوی سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بزانیت، ئەوا دەتوانیت سیستمەکە بە لەجیاتی دانانی بەهای ئەم نەزانراوە لە یەکێك لە دوو هاوکێشەکە شیکاربکەیت. ئەم ڕێگایە بەبۆ شیکاری سستەمەکە پێی دەوترێت ڕێگای لەجیاتی دانان **Substitution method**.

نموونە 1 سیستمی $\begin{cases} 8x+2y=19 \\ x=3 \end{cases}$ بە ڕێگای لەجیاتیدانانشیکاربکە.

شیکار

لەبەر ئەوەی $x=3$ ، دەتوانیت لەجیاتی x لە هاوکێشە یەکەمدا بەهاکەی دابنێی.

هاوکێشەی دەستکەوتوو شیکاربکە بۆ دۆزینەوەی بەهای نەزانراوی y.

$$\begin{aligned} 8(3)+2y&=19 \\ 24+2y&=19 \\ 2y&=-5 \\ y&=-2.5 \end{aligned}$$

جووتە ڕێکخراوی $(3, -2.5)$ شیکاری سستەمەکەیە.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بە لەجیاتیدانانی x و y لە هاوکێشەی یەکەمدا:

$$\begin{aligned} 8(3)+2(-2.5)&\overset{?}{=}19 \\ 24+(-5)&\overset{?}{=}19 \\ 19&=19 \end{aligned}$$

ڕاستە

نموونە 2 سستەمی $\begin{cases} 15x-5y=30 \\ y=2x+3 \end{cases}$ شیکاربکە بە ڕێگای لەجیاتیدانان.

شیکار

لەجیاتی y بەهای $2x+3$ لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ پاشان هاوکێشە دەستکەوتووەکە شیکاربکە.

$$\begin{aligned} 15x-5(2x+3)&=30 \\ 15x-10x-15&=30 \\ 5x-15&=30 \\ 5x&=45 \\ x&=9 \end{aligned}$$

بەهای 9 لە جیاتی x لە هاوکێشەی دووەمدا دابنێ پاشان هاوکێشە دەرچووەکە شیکاربکە.

$$\begin{aligned} y&=2(9)+3 \\ &=18+3 \\ &=21 \end{aligned}$$

شیکارەکە بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(9, 21)$.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بە لەجیاتیدانانی بەهای x و y لە دوو هاوکێشە سەرەکییەکەدا.

$$\begin{aligned} 15(9)-5(21)&\overset{?}{=}30 \\ 135-105&\overset{?}{=}30 \\ 30&=30 \end{aligned}$$

ڕاستە

$$\begin{aligned} 21&\overset{?}{=}2(9)+3 \\ 21&\overset{?}{=}18+3 \\ 21&=21 \end{aligned}$$

ڕاستە

هەوڵبدە ئەم سستەمانە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

أ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=5 \end{cases}$

ب $\begin{cases} -3x+2y=31 \\ x=0.5y+6 \end{cases}$

نموونە 3

سستەمی $\begin{cases}3x+y=4\\5x-7y=11\end{cases}$ بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

شیکار

بۆ ئەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان بەکاربهێنیت، شیکاری هاوکێشەی یەکەم بکە بۆ هەژمارکردنی بەهای y بەپێی x.

ئاسانترین هاوکێشە بۆشیکارەکە هەڵبژێرە.

$$3x+y=4$$
$$3x+y-3x=4-3x$$
$$y=4-3x$$

لەجیاتی y لە هاوکێشەی دووومدا بەهاکەی $4-3x$ دابنێ پاشان هاوکێشەکەی شیکاربکە.

$$5x-7y=11$$
$$5x-7(4-3x)=11$$
$$5x-28+21x=11$$
$$26x-28=11$$
$$26x=39$$
$$x=1.5$$

لەجیاتی x بەهای 1.5 لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$3(1.5)+y=4$$
$$4.5+y=4$$
$$y=-0.5$$

شیکار بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(1.5, -0.5)$.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بەلەجیاتیدانانی بەهای x و y لە هەردوو هاوکێشە بنەڕەتییەکەدا.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی لە نموونەی 3 دا هەستایت بە هەژمارکردنی نەزانراوی y بەپێی x لە هاوکێشەی یەکەمدا لە جیاتی هەژمارکردنی x بەپێی y ؟

هەوڵبدە سستەمی $\begin{cases}6x-2y=11\\x+3y=4\end{cases}$ بەڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

نموونە 4

جێبەجێکردنەکان
بازرگانی

سۆران لە یاریەکانی کۆتایی تۆپی پێدا کڵاو دەفرۆشێت، 100 کڵاوی وەرزی پێشووی لاماوە و 300 کڵاوی تازەی هەیە. سۆران لەم وەرزە دەیەوێت هەموو کڵاوەکان بە 5 300 000 دینار بفرۆشێت. دەبێ نرخی چەند بۆ کڵاوی تازە و کڵاوی کۆن دابنێت بۆ گەیشتن بەو ئامانجە، ئەگەر بزانیت نرخی کڵاوێکی تازە 7000 دیناری لە نرخی کڵاوێکی کۆن زیاترە.

شیکار

بە هەڵبژاردنی دوو نەزانراو دەستپێدەکەم. با نەزانراوی d بۆ هێمای نرخی کڵاوە کۆنەکە هەڵدەبژێرم و هێمای n نرخی کڵاوێکی تازە بێت.

سستەمی دوو هاوکێشەکە بنووسە بۆ شیکای پرسیارەکە

$$\begin{cases}300n + 100d=5\ 300\ 000\\n=d + 7\ 000\end{cases}$$

لەجیاتی n لە هاوکێشەی یەکەمدا نرخی $d+7000$ دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$300\ (d+7000) + 100d = 5\ 300\ 000$$
$$300d + 2\ 100\ 000 + 100d= 5\ 300\ 000$$
$$400d + 2\ 100\ 000 = 5\ 300\ 000$$
$$400d = 3\ 200\ 000$$
$$d =8\ 000$$

لەجیاتی d نرخی 8 000 لە هاوکێشەی دووومدا دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$n = 8\ 000 + 7\ 000$$
$$n = 15\ 000$$

شیکارەکە بریتیە لە (8000 , 15 000) سۆران پێویستە کڵاوە تازەکان بە نرخی 15 000 دینار بفرۆشێت و کڵاوە کۆنەکان بە 8 000 دینار بفرۆشێت.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەر بزانیت $y = 42$، ئەوا چۆن لە جیاتیدانان بەکاردێنێت بۆشیکاری هاوکێشەی $y = x + 8$ ؟

2 دوو هاوکێشەی $-4x + y = 2$ و $2x + 3y = 34$ هەبێت، ئاسانترین نەزانراو و ئاسانترین هاوکێشە هەڵبژێرە بۆ دەستپێکردنی شیکار و هۆی هەڵبژاردنەکەت دیاربکە پاشان شیکاریان بکە.

3 ڕوونیبکەوە چۆن لەجیاتیدانان بە کاردەهێنیٚ بۆ شیکارکردنی سیستمی $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم سیستمانە بەلەجیاتیدانان شیکار بکە. پاشان پاسادانی شیکارەکە ساغبکەوە.

4 $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

8 سەرجەمی دوو ژمارە دەکاتە 27 ، گەورەکەیان 3 ی زیاترە لەوەی تریان ئەم دوو ژمارەیە کامانەن.

ئەم سستەمانە شیکاربکە.

9 $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 10x = 4y - 2 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

23 $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

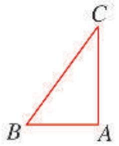
25 $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

26 $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

بەستنەوە

27 ئەندازە درێژی و پانی لاکێشەیەك بدۆزەوە ئەگەر زانیت چێوەکەی یەکسانە بە 208m و درێژییەکەی دوو ئەوەندەی پانیەکەیەتی.

28 ئەندازە سەرجەمی پێوانەی دوو گۆشەی B و C لە سێگۆشەی بەرامبەردا دەکاتە 90°. هەژماری پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی سێگۆشەکە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت پێوانەی گۆشەی B 30° کەمترە لە دوو ئەوەندەی پێوانەی گۆشەی C.



بەستنەوە

29 بیردۆزی ژمارەکان ژمارەی x چواری کەمترە لە سێ ئەوەندەی ژمارە y ، ئەگەر دوو ئەوەندەی y کەم بکرێتەوە لە کۆی 3 لەگەڵ دوو ئەوەندەی x دەکاتە 11. ئەو دوو ژمارەیە چەندن؟

سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی بۆهەر پرسیارێك بنووسە پاشان شیکاریانبکە.

30 بۆخۆشی بالۆنێك لە زەویەوە بەرزبووەوە بە خێرایی 4m لە خولەکێکدا، و لە هەمان کاتدا بالۆنێکی تر لە بەرزی 756m دەستیکرد بە هاتنە خوارەوە بەخێرایی 3m لە خولەکێکدا پاش چەند خولەك دوو پەرەشوتەکە بەیەکتردەگەن.

31 کاری خێرخوازی کۆمەڵەی چاودێری خێرخوازی ئاهەنگێکی سازکرد و تەنیا دیاری پێشکەشکرا بۆ گەوران و منداڵان کرد کە ژمارەیان 210 کەس بون بەمە 935 هەزار دیناری تێچوو. ئەگەر نرخی دیاری بۆ گەورە 6 هەزار دینار بێت و بۆ منداڵان 3.5 هەزار دینار بێت ئەوا:

أ هاوکێشەیەك بنووسە کە کۆی هەردوو بڕی پارەکە بە تەواوی دەربخات.

ب هاوکێشەیەك بنووسە کە ژمارەی تەواوی کەسەکان دیاربکات.

ج هەردوو هاوکێشەی دەستتکەوتووە شیکاربکە. ژمارەی گەورەکان چەندن؟ ژمارەی منداڵاکان چەندن؟

32 دەروازەیەك لەسەر رۆشەنبیری چینی ژمارەیەك لە جوتیارانی چینی هاوبەشیان کرد لە دابینکردنی نرخی ئامێرێکی کشتوکاڵیدا، ئەگەر هەریەکێکیان 8 پارچە پارە بدات، بڕی پارەکە 3 پارچە زیاتر دەبێت لە بڕی پێویست، و ئەگەر هەر یەکێکیان 7 پارچە پارەبدات، بڕی پارەکە 4 پارچە کەمتردەبێت لە بڕی پێویست. ئایا ژمارەی جوتیارەکان چەندە؟ و نرخی ئامێرەکەش چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

33 بۆ خۆشی لە پێشبرکێیەکی ڕاکردندا نەسرین 20 مەتر پێش شنۆ کەوت، و شنۆ 5 مەتر لە دوای ژیان ، و ژیان بە 10 مەتر لە دوای بەهارە، بەڵام شیرین بە 15 مەتر لە پێش بەهارەوەیە. ڕیزبەندی ڕاکەرەکان چۆنە؟

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

34 $\frac{x}{15}=3$ **35** $\frac{3}{x}=15$

36 $\frac{15}{x}=3$ **37** $\frac{x}{3}=15$

38 42% ی ژمارەیەك دەکاتە 12.6 ، ژمارەکە کامەیە؟

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی هەریەك لەم سیستمانە (تێبینیبکە سیستمەکە لە 3 هاوکێشە 3 نەزانراوەکانە.

39
$$\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ y+3z=3 \\ z=2 \end{cases}$$

40
$$\begin{cases} 2x+3y+5z=44 \\ 2y-6z=4 \\ z=4 \end{cases}$$

وانەی

6

شیکارکردنی سیستەمە هێڵییەکان بەلابردن

Solving Linear Systems by Cancellation



ئامانجەکان

- سیستمێك لە دوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە بە ڕێگای لابردن شیکاردەکات.

بۆچی

لابردن ڕێگایەکی نوێیە کە شیکارێکی خێرا دەدا بەدەستەوە بۆ سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی ئاڵۆز کە لەم وانەیەدا دێتە پێشت.

جێبەجێکردنەکان

بەکرێدانی ئوتومبیل

نووسینگەی هەوار هەڵدەستێت بە بەکرێدانی ئوتومبیل. گەشتیارێك بڕێك پارە دەدات بەرامبەر هەر ڕۆژێك بۆ بەکرێگرتنی ئۆتۆمبیلێك و بڕێکی تر پارە دەدات بۆ هەر کیلۆمەترێك ئۆتۆمبیلەکە دەیبڕێت. ڕزگار و زانا هەریەکەیان ئۆتۆمبیلێك دەگرن لە نووسینگەی هەوار بەکری بۆ گەشتێك. گەشتی ڕزگار 2 ڕۆژی خایاند و 125 کیلۆمەتری بڕی و گەشتەکەی زانا 4 ڕۆژی خایاند و 350 کیلۆمەتری بڕی، ڕزگار287.25 هەزار دیناری دا، و زانا 697.50 هەزار دیناری دا. کرێی ڕۆژێکی ئۆتۆمبیلەکە دیاربکە و تێچووی کیلۆمەترێك.

دەتوانیت سستەمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی بنووسیت، پاشان بۆ دیاریکردنی هەردوو کرێیەکە شیکاریان بکەیت.

شیکاری پرسیارەکە

بە پێناسەکردنی هەردوو نەزانراوی پرسیارەکە دەستپێبکە.

نەزانراوی d : هێمای کرێی ئوتومبیلەکە بێت لە ڕۆژێکدا

نەزانراوی k : هێمای پارەی کرێی یەك کیلۆمەتر بێت .

لە زانیارییەکانی سەرەوەدا دەتوانیت سستەمی هەردوو هاوکێشە بنووسیت.

$$\begin{cases} 2d + 125k = 287.250 \\ 4d + 350k = 679.500 \end{cases}$$

بێگومان دەتوانیت ئەم سیستەمە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکەیت بەڵام ئەمە کارێکی ئاسان نییە. لەم وانەیەدا فێری ڕێگایەکی تازە دەبیت بۆشیکارکردنی سیستمە ئاڵۆزەکان.

چالاكی

Using Inverses بەكارهێنانی دژەكان

ستەمی ئەم دوو هاوكێشەیە $\begin{cases}3x+2y=7\\5x-2y=9\end{cases}$ شیكاربكەیت.

1. ئەم دوو هاوكێشەیە دوو ڕادەی دژ بەیەكتری تێدایە. كامانەن؟
2. سیفەتی كۆكردنەوە لە یەكسان بووندا بەكاربهێنە بۆ ئەوەی هاوكێشەیەكت دەستبكەوێت لە هەردوو هاوكێشەكەوە ($3x + 2y$ و $5x -2y$ لەگەڵ 7 و 9 كۆبكەوە). هاوكێشە تازەكە چەند نەزانراوی تێدایە.
3. هاوكێشە تازەكە شیكاربكە بۆ دیاركردنی بەهای نەزانراوەكە. پاشان بەهای نەزانراوەكە لە یەكێك لە دوو هاوكێشە سەرەكییەكاندا دابنێ. هاوكێشە دەرچووەكە شیكاربكە بۆ دیاركردنی بەهای نەزانراوی دووەم.
4. پاسادانی ئەوە بكە كە هەردوو بەهای دەستكەوتوو بۆ دوو نەزانراوی x و y دەبنە شیكاری ستەمی دوو هاوكێشەكە .
5. ڕوونیبكەوە چۆن دژەكان بەكاردەهێنیت بۆ شیكاری ستەمی هاوكێشەكان.

خاڵی چاودێری ✔

Cancellation Method ڕێگای لابردن

لە چالاكییەكەی پێشوودا **ڕێگای لابردنت** بەكارهێنا بۆشیكاركردنی ستەمی دوو هاوكێشە. ئەم ڕێگایە بەكاردەهێنرێت بۆ لابردنی دژەكانی یەكێك لە دوو نەزانراوەكە.

نموونە 1 ڕێگای لابردن بەكاربهێنە بۆشیكاری ئەم ستەمە $\begin{cases}\mathbf{3x+4y=7}\\\mathbf{2x-4y=13}\end{cases}$.

شیكار

سیفەتی كۆكردنەوە لە یەكسانیدا بەكاربهێنە بۆ دەستكەوتنی هاوكێشەیەك تەنها x ی تێدابێ كە لە هەردوو هاوكێشەكەوە دەردەچێت و هاوكێشەكە شیكاربكە.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\ \underline{2x-4y}&\underline{=13}\\5x+0&=20\\5x&=20\\x&=4\end{aligned}$$

تێبینیبكە $4y$ و $-4y$ دژی یەكترن

بۆ دیاریكردنی بەهای y لەجیاتی بەهای x 4 دابنێ لە هاوكێشەی یەكەمدا.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\3(4)+4y&=7\\12+4y&=7\\4y&=-5\\y&=-1.25\end{aligned}$$

شیكاری ستەمەكە دەبێتە $(4, -1.25)$

بەهای x بە 4 و بەهای y بە -1.25 لە هەردوو هاوكێشە سەرەكییەكەدا دابنێ بۆ پاسادانكردنی شیكارەكە:

$$\begin{aligned}3(4)+4(-1.25)&\stackrel{?}{=}7\\12+(-5)&\stackrel{?}{=}7\\7&=7\end{aligned}$$ ڕاستە

$$\begin{aligned}2(4)-4(-1.25)&\stackrel{?}{=}13\\8-(-5)&\stackrel{?}{=}13\\13&=13\end{aligned}$$ ڕاستە

تێبینی ئەوە بكە كە هاوكۆلكەی y لە هەردوو هاوكێشەكەدا دژی یەكترن. ئەمەش وا دەكات كە شیكاری ئەم جۆرە ستەمانە ئاسان بێت.

جاری وا هەیە هەردووڵای یەکێك لە هاوکێشەکان یان هەردووکیان لە ژمارەیەك بدرێت بۆ بەدەستهێنانی دوو دژەکە و لابردنی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە. ئەگەر هاوکۆڵکەی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە 1 بێت کارەکە ئاسانە، بەڵام دەکرێت ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکرێت لەسەر ئەو سیستمانەی زیاتر ئاڵۆزن وەك سیستمی نموونە 2.

نموونە 2

ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی سیستمی $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

شیکار

هەردوو لای هاوکێشەی یەکەم لە ژمارە 5 بدە و هەروەها هەردووڵای هاوکێشەی دووەم لە 2− بدە بۆ ئەوەی دوو ژمارەی دژت دەستکەوێت.

$\begin{cases} (5)2x+(5)3y=(5)1 \\ (-2)5x+(-2)7y=(-2)3 \end{cases}$ یان $\begin{cases} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \end{cases}$

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ ئەوەی هاوکێشەیەکی تازەت دەستبکەوێت تەنها یەك نەزانراوی تێدابێت ئەویش بریتییە لە y ، پاشان ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە. لەجیاتی y بەهاکەی لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ بۆ دیاریکردنی بەهای x .

$$\begin{aligned} 10x+15y&=5 \\ -10x-14y&=-6 \\ \hline y&=-1 \\ 2x+3y&=1 \\ 2x+3(-1)&=1 \\ 2x-3&=1 \\ 2x&=4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

شیکارەکە دەبێتە $(2, -1)$.

پاسادانی شیکارەکە بکە بە دانانی بەهای هەردوو نەزانراوەکان لە هەردوو هاوکێشەکەدا.

$2(2)+3(-1)\stackrel{?}{=}1$

$4+(-3)\stackrel{?}{=}1$

$1=1$ ڕاستە

$5(2)+7(-1)\stackrel{?}{=}3$

$10+(-7)\stackrel{?}{=}3$

$3=3$ ڕاستە

نموونە 3

ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی ئەو پرسیارەی لە سەرەتای وانەکە باسکرا $\begin{cases} 2d+125k=287.25 \\ 4d+350k=679.50 \end{cases}$.

شیکار

هەردووڵای هاوکێشەی یەکەم لە 2− بدە.

$\begin{cases} (-2)2d+(-2)125k=(-2)287.25 \\ 4d+350k=679.50 \end{cases}$

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ بەدەستکەوتنی هاوکێشەیەکی نوێ کە یەك نەزانراوی تێدابێ ئەویش k ،پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$\begin{aligned} -4d+(-250k)&=-574.50 \\ 4d+\ \ 350k&=\ \ 679.50 \\ \hline 100k&=105 \\ k&=1.05 \end{aligned}$$

لەجیاتی k بەهاکەی دابنێ لە هاوکێشەی یەکەمدا بۆ دیاریکردنی بەهای d .

$$\begin{aligned} 2d+125(1.05)&=287.25 \\ 2d+131.25&=287.25 \\ 2d&=156 \\ d&=78 \end{aligned}$$

شیکاری سیستمی هاوکێشەکانی پێشوو بریتییە (78; 1.05) دەتوانیت پاسادانی ڕاستییەکەی بە لەجیاتیدانان بکەیت، کرێی ئۆتومبیل لە ڕۆژێکدا 78 هەزار دینار و بری تێچووی یەك کیلۆمەتر 1.05 هەزار دینارە.

هەوڵبدە

هەریەکە لەم سستەمانە بە ڕێگای لابردن شیکاربکە.

أ) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x+7y=41 \end{cases}$

ڕاهێــــــــنـان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

هەردوو ڕادە دژەکە لە هەریەك لەم سیستمانە دەستنیشانبکە و ڕوونیبکەرەوە چۆن شیکاری دەکەیت.

1 $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

جێبەجێکردنەکان

ئەو هەنگاوانەی پێویستن بۆ شیکارکردنی هەریەك لەم سیستمانە بە ڕێگای لابردن باسبکە.

4 $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$ **6** $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

شیکاری سستەمەکان بە لابردن بکە، پاشان پاسادانی شیکارەکە بکە.

7 $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ **8** $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$ **10** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سیستمەکان بە لابردن شیکاربکە و پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە.

11 $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$ **12** $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

13 $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$ **14** $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$ **16** $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

17 $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$ **18** $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$ **20** $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$ **22** $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$ **24** $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

سیستمی دوو هاوکێشە بۆهەر پرسیارێك بنووسە. باشترین ڕێگا هەڵبژێرە بۆشیکاری سیستەمەکە. سیستمەکە شیکاربکە و پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە.

جێبەجێکردنەکان

25 **بیرکاری بۆ بەکاربەر** مامۆستای بیرکاری بڕیاریدا ئاهەنگێك بۆ خوێندکارانی خۆی بەبۆنەی جەژنی نەورۆزەوە سازبدات، 3 کارتۆن کێك و 3 شوشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «أ» کڕی بە 54 هەزار دینار. و 4 کارتۆن کێك و 6 شوشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «ب» کڕی بە 78 هەزار دینار. نرخی هەریەك لە کارتۆنێك کێك و شوشەیەك شەربەت چەندە؟

26 **داهات** بارام پاسەوانە لە یەکێك لە گۆڕەپانەکانی وەستانی ئۆتۆمبیل. داهاتێکی نەگۆڕی هەیە بەرامبەر 15 ڕۆژ کارکردن لە مانگێکدا و بۆ هەر ڕۆژێکی زیاد کاربکات کرێیەکی زیادەی هەیە. بارام 25 ڕۆژ لە مانگی یەکەم کاریکرد بەمە 720 هەزار دیناری وەرگرت و 22.5 ڕۆژ لە مانگی دووەم کاریکرد بەمەش 641.25 هەزار دیناری وەرگرت. کرێیە نەگۆڕەکەی وکرێی ڕۆژانەکەی چەندە؟

27 **بازرگانی** یەکێك لە تۆمارگاکان دوو جۆر شریتی مۆسیقا دەفرۆشێت یەکێکیان شریتی هەڵپەڕکێ و ئەوی تریان شریتی مۆسیقای کلاسیکییە. نرخی شریتێکی هەڵپەڕکێ دەکاتە 21 پارچەپارە و نرخی شریتی مۆسیقای کلاسیکی 33 پارچەپارەیە. تۆمارگاکە لە یەکێك لە ڕۆژەکاندا 25 شریتی لە هەردوو جۆر فرۆشت و بەمەش دەستکەوتەکەی 693 پارچەپارە بوو، تۆمارگاکە چەند شریتی هەڵپەڕکێ و چەند شریتی مۆسیقای کلاسیکی فرۆشتووە؟

28 **بەکرێدانی خانوو** کرێچییەك لەگەڵ کرێی مانگی یەکەمدا بارمەتیەك دادەنێ. جوامێر لە مانگی یەکەمدا 270 000 دیناریدا و بە درێژای ساڵەکە 2 085 000 دیناری دا. ئەوا بەهای هەریەکە لە بارمتە و کرێی خانووەکەی لە مانگێکدا چەندە؟

29 **گەشتیاری** ئوتێلێك دوو جۆر پیشاندانی خستەڕوو یەکەمیان 2 شەو 4 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بەنرخی 61 500 دینار و دووەمیان 3 شەو 8 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بە نرخی 102 750 دینار، ئایا تێچووی شەوێك چەندە؟ تێچوونی ژەمە خواردنێك چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە.

30 $-5 = -x + 7$ **31** $3x - 2 = 2x + 1$ **32** $\frac{1}{2}x + 3 = 2$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

33 **تەکنەلۆجیا** وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $2x - 3y = 6$ و $4x - 6y = 18$ بکێشە لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا. باسی ئەوە بکە کە دەستتکەوتووە.

وانەی

7

بڕە ڕەگییەکان
Radical Expressions



بۆچی

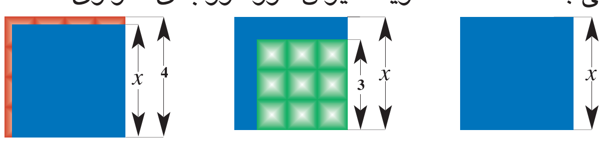
بەزۆری ڕەگەکان لە هەژمێرکردنی ئامار و فیزیادا دەردەکەون، هەروەها لە چالاکییە ڕۆژانەکانی پەیدادەبن هەروەك ڕیزبەندی.

ئامانجەکان

- بەهای بڕێك هەژمار دەکات ڕەگەکانی تێدابێت.
- ئەو برانەی کە ڕەگیان تێدابێت سادەدەکات

خەملاندنی ڕەگی دووجا Estimating Square Root

ڕووبەری چوارگۆشە شینەکەی سانا 12 یەکە دووجایە. چۆن درێژی لایەکی چوارگۆشەی دیاردەکەیت؟ بیرت بێت کە ڕێسای هەژمێری ڕووبەری چوارگۆشەیەك بەشێوەی $x^2 = 12$ دەبێت کاتێك گۆڕاوی x درێژی لایەکی چوارگۆشە شینەکە بێت. کەواتە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە بریتییە لە ڕەگی دووجای ژمارە 12 . چونکە 12 دووجای تەواو نییە. کەواتە دەبێ درێژی لایەکی x بخەملێنی. تێبینی بکە کە 12 دەکەوێتە نێوان دوو دووجای تەواوی 9 ، 16 .



ڕووبەری چوارگۆشەکە لە 9 نزیکترە وەك لە 16 ، لەمەوە دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە دەکەوێتە نێوان 3.4 و 3.5 هەژمێری دووجای ژمارەی دەییەکانی بکە کە لە دوو ڕەنووس پێکدێن پاش فارزەکە دەکەونە نێوان 3.4 و 3.5 .

$3.42^2 = 11.6964$	$3.41^2 = 11.6281$	$3.4^2 = 11.56$
$3.45^2 = 11.9025$	$3.44^2 = 11.8336$	$3.43^2 = 11.7649$
$3.48^2 = 12.1104$	$3.47^2 = 12.0409$	$3.46^2 = 11.9716$
	$3.5^2 = 12.25$	$3.49^2 = 12.1801$

کەواتە، باشترین خەملاندن بۆ ڕەگی دووجای ژمارە 12 بریتییە لە 3.46 .واتە، $\sqrt{12} \approx 3.46$.

ڕەگی دووجا Square Root

ئەگەر a ژمارەیەکی ڕاستی سالب نەبێت، ئەوا دوو ڕەگی دووجای هەیە یەکێکیان موجەبە و دەنووسرێت $\sqrt{a}$ وئەوی تریان سالبە و دەنووسرێت $-\sqrt{a}$ و هەریەك لەو دوو ژمارەیە پاسادانی ئەم سیفەتە دەکەن: $(\sqrt{a})(\sqrt{a}) = a$ و $(-\sqrt{a})(-\sqrt{a}) = a$

Simplify Radical Expressions — سادەکردنی برە ڕەگییەکان

برە ڕەگییەکان **Radical Expressions** ئەو برانەن ڕەگیان تێدایە و کاتێك دەتەوێت برە ڕەگییەکان کۆبکەیتەوە یان لێکیان دەربکەیت دڵنیابە ئەو ژمارانەی دەکەونە ژێر هێمای ڕەگەکە یەکسانن. بۆ نموونە، دەتوانیت دوو بڕی $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ کۆبکەیتەوە و لەمەوە $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ دەستکەوێت.

نموونە 1

ئەم برانە سادەبکە.

أ $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}$ ج $5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

ب $8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ د $b\sqrt{x}+y\sqrt{x}$

شیکار

أ سیفەتی بەشینەوە بۆ کۆکردنەوەی ڕادە لێکچووەکان بەکاربهێنە پاشان هەژمێری بکە.
کۆڵکەی هاوبەش بریتییە لە $\sqrt{6}$.
$$5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=(5-2)\sqrt{6}=3\sqrt{6}$$

ب ڕیزبەندی ڕادەکان بکە بۆ ئاسانکردنی سادەکردنەوەکە.
$$5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3=5-3+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}=2+4\sqrt{7}$$

ج ڕیزبەندی ڕادەکان بکە بۆ ئاسانکردنی سادەکردنەکە.
$$8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}=8\sqrt{3}-\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{3}+8\sqrt{2}$$

د مامەڵە لەگەڵ گۆڕاوەکان بکە وەك ئەوەی ژمارەبن.
$$b\sqrt{x}+y\sqrt{x}=(b+y)\sqrt{x}$$

هەوڵبدە ئەم برانە سادەبکە أ $4\sqrt{6}-\sqrt{6}$ ب $y+2\sqrt{x}-2y-3\sqrt{x}$

چالاکی

Operations with Radical Expressions — برە ڕەگییەکان و کردارەکان

بۆ ئەنجامدانی کردارەکان پەیوەندی نێوان ڕەگەکان و هێزەکان و توانە ڕێژەییەکان بەکاربهێنە.

1. بە دوو ڕێگا $\sqrt{9\times16}$ هەژمێربکە.
   أ $\sqrt{9\times16}=\sqrt{144}=?$ ب $\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=?$
2. سێ نموونە بهێنەرەوە بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی پەیوەندی $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
3. هەژمێری $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ بکە و ئەنجامەکانیان بەراوردبکە.
4. سێ نموونە بهێنەرەوە ڕوونی بکاتەوە $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هەمووکات ڕاست نییە.

خاڵی چاودێری ✓

Multiplying Square Roots — سیفەتی لێکدانی ڕەگە دووجاکان

ئەگەر دوو ژمارەی ڕاستی a ، b سالب نەبن ئەوا:
$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

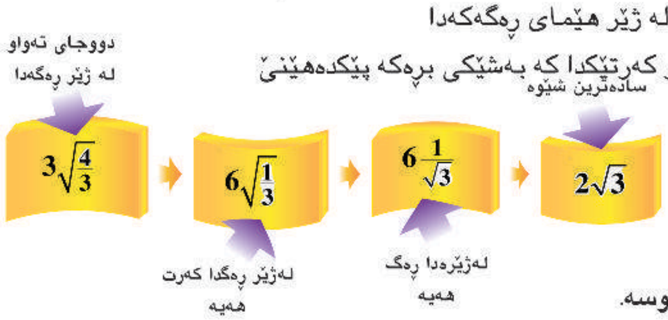
ڕەفتارکردن لەگەڵ بڕە ڕەگییە سادەکراوەکان ئاسانترە لە ڕەفتارکردن لەگەڵ ئەو بڕانەی سادەنەکراون.

بڕی ڕەگی بە سادەترین شێوە **Simplist form** دەبێت، ئەگەر ئەم مەرجانەی خوارەوەی تێدابێت:

1. نەبوونی دووجای تەواو لەنێوان کۆلکەکانی ژمارەکە لەژێر هێمای ڕەگەکەدا.

2. نەبوونی کەرت یان کەرتەکان لە ژێر هێمای ڕەگەکەدا

3. نەبوونی ڕەگەکان لەژێرەی هەر کەرتێکدا کە بەشێکی بڕەکە پێکدەهێنێ (بیرت بێت ڕێژەکردنی ژێرە)



نموونە 2

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\sqrt{12}$ ب $\sqrt{400}$ ج $\sqrt{a^2}$ د $\sqrt{a^5b^{10}}$

شیکار

بەدوای دووجا تەواوەکاندا بگەڕێ لە نێوان هاوکۆلکەکاندا. سیفەتی لێکدانی ڕەگە دووجاکان بەکاربهێنە، ڕەگی دووجای ئەو دووجایە سادەبکە. کۆلکەکانی تر بەجێبهێڵە.

أ $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

ب $\sqrt{400} = \sqrt{4}\times\sqrt{100} = 2\times 10 = 20$

لەبەر ئەوەی هێمای ڕەگی دووجا ڕەگێکی سالب نییە لەمەوە $\sqrt{a^2}$ سالب نییە. هێمای ڕووت بەکاربهێنە بۆ نیشانی ئەوە، کاتێك توانی گۆڕاوەکە لەژێر هێمای ڕەگەکەدا جووت بێت، و توانی گۆڕاوەکە لە دەرەوەی هێمای ڕەگدا بێت، پاش سادەکردن تاك بێت.

ج $\sqrt{a^2} = |a^1| = |a|$

د $\sqrt{a^5b^{10}} = \sqrt{a(a^2)^2(b^5)^2} = a^2|b^5|\sqrt{a}$

هەوڵبدە $\sqrt{72m^2n^5}$ سادەبکە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی بەکارهێنانی هێمای بەهای ڕووت لەمانەی خوارەوە بەپێویست نازانرێت.

أ $\sqrt{b^3} = b\sqrt{b}$ ب $\sqrt{b^4} = b^2$

نموونە 3

ئەم بڕانە سادەبکە.

أ $(5\sqrt{3})^2$ ب $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

ج $\sqrt{2}(6+\sqrt{12})$ د $(3-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})$

شیکار

أ بیرت بێ کە دووجای هەر ژمارەیەك دەکاتە لێکدانی ژمارەکە لەخۆی. ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکە. پاشان کۆلکەکان پێش لێکدان ڕیزبەند بکە.

$$(5\sqrt{3})^2 = (5\sqrt{3})(5\sqrt{3}) = (5\times 5)(\sqrt{3}\times\sqrt{3}) = 25\times 3 = 75$$

ب سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان بەکاربهێنە. ئەنجامی لێکدانەکە کە لە ژێر هێمای ڕەگەکەدایە شیتەڵبکە پاشان سادەیبکە. $\sqrt{3}\times\sqrt{6} = \sqrt{3\times 6} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

ج سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی لێکدان و شیکردنەوە و سادەکردن ئەنجامبدەیت.

$$\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right)=6\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{12}=6\sqrt{2}+\sqrt{2\times 12}$$
$$=6\sqrt{2}+\sqrt{24}=6\sqrt{2}+\sqrt{6\times 4}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)=12+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2=10-\sqrt{2}$

هەوڵبدە ئەمانە کورتبکەرەوە. أ $\left(2\sqrt{7}\right)^2$ ب $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{8}\right)$

سیفەتی دابەشکردنی ڕەگە دووجاکان Dividing Square Roots

ئەگەر a ، b دوو ژمارەی ڕاستی موجەب بن ئەوا:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

نموونە 4 ئەم برانە سادەبکە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}$ ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}$

شیکار

پاش بەکارهێنانی سیفەتی دابەشکردنی ڕەگەکان، ڕەگی دووجای هەریەکە لەمانەی خوارەوە بنووسە. سەرە و ژێرەی هەریەکیان بە جیا سادەبکە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}=\frac{|a|b\sqrt{b}}{|c|}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

ژێرەی دوا وەڵام ڕەگی تێدایە. ئەگەر دەتەوێت خۆتی لێ ڕزگاربکەی، برەکە لە بڕی $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ بدە کە یەکسانە بە 1.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

بەم کردارەش دەوترێت ڕێژەکردنی ژێرە.

هەوڵبدە ئەم برانە سادەبکە. أ $\sqrt{\frac{4}{24}}$ ب $\sqrt{\frac{4}{3}}$ د $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕوونیبکەرەوە چۆن پەرەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردێنیت بۆ دیاریکردنی ڕەگی دووجای ژمارەی 16 (دووجای تەواو).
2. ڕوونیبکەرەوە چۆن پەرەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردێنیت بۆ دیاریکردنی ڕەگی دووجای ژمارەی 19(دووجای تەواو نییە).
3. ڕوونیبکەرەوە $\sqrt{7}$ چۆن دەخەمڵێنی بەبێ بەکارهێنانی بژمێرە یان پەرەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان.
4. چۆن شیتەڵکردن بەکاردەهێنیت بۆ سادەکردنی بڕێکی ڕەگی وەك بڕی $5\sqrt{90x^3y^4}$.
5. سادەترین شێوە بۆ بڕێکی ڕەگی چییە؟

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

هەژماری ئەم ڕەگە دووجایانە بکە.

6 $\sqrt{36}$ 7 $-\sqrt{64}$ 8 $\pm\sqrt{81}$ 9 $-\sqrt{121}$

ئەم برانە سادەبکە.

10 $8\sqrt{3}-6\sqrt{3}$ 11 $9+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4$

ئەم برە ڕەگیانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

12 $\sqrt{32}$ 13 $\sqrt{x^2y^7}$ 14 $\sqrt{27x^6}$ 15 $\sqrt{a^7b^3}$

ئەم برانە سادەبکە.

16 $\left(7\sqrt{11}\right)^2$ 17 $\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ 18 $\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)$

19 $\sqrt{\frac{9}{4}}$ 20 $\sqrt{\frac{6}{49}}$ 21 $\sqrt{\frac{225}{18}}$ 22 $\sqrt{\frac{x^7y^{14}}{z^3}}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم ڕەگە دووجایانە هەژمار کە. ئەگەر ڕەگەدووجاکان ڕێژەیی نەبوون ئەوا بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

23 $\sqrt{225}$ 24 $-\sqrt{169}$ 25 $-\sqrt{11}$ 26 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 27 $-\sqrt{40}$

28 $-\sqrt{27}$ 29 $\sqrt{1000}$ 30 $\sqrt{10000}$ 31 $-\sqrt{0.04}$ 32 $\sqrt{0.059}$

بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن ئەمانە سادەبکە.

33 $\sqrt{49}$ 34 $\sqrt{196}$ 35 $\sqrt{576}$ 36 $\sqrt{3600}$ 37 $\sqrt{192}$

38 $\sqrt{75}$ 39 $\sqrt{98}$ 40 $\sqrt{1620}$ 41 $\sqrt{264}$ 42 $\sqrt{648}$

وادابنێ a ، b ژمارەی موجەب بن، و دیاریبکە ڕستەکە ڕاستە یان نا.

43 $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 44 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 45 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

46 $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ 47 $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$ 48 $\sqrt{48}\times\sqrt{3}$ 49 $\sqrt{54}\times\sqrt{6}$

50 $\sqrt{\frac{64}{16}}$ 51 $\sqrt{\frac{96}{2}}$ 52 $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$ 53 $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

54 $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$ 55 $\sqrt{98}\times\sqrt{14}$ 56 $\sqrt{\frac{56}{8}}$ 57 $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$

ئەم برانەسادە بکە و وایدابنێ هەموو گۆڕاوەکان سالب نین و هەموو ژێرەکان جیاوازن لە سفر.

58 $\sqrt{a^4b^6}$ 59 $\sqrt{x^8y^9}$ 60 $\sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}}$ 61 $\sqrt{\frac{x^3}{y^6}}$

ئەو کردارانەی لە توانات دا هەیە ئەنجامیان بدە و وەڵامەکەت بە سادەترین شێوە بنووسە.

62 $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$

63 $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

64 $\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

65 $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$

66 $\frac{6+\sqrt{18}}{3}$

67 $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

ئەمانە سادەبکە.

68 $\left(3\sqrt{5}\right)^2$

69 $\left(4\sqrt{25}\right)^2$

70 $\sqrt{12}\times\sqrt{6}$

71 $\sqrt{72}\times\sqrt{32}$

72 $3\left(9+\sqrt{5}\right)$

73 $\sqrt{5}\left(6-\sqrt{15}\right)$

74 $\sqrt{6}\left(6+\sqrt{18}\right)$

75 $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)$

76 $\left(\sqrt{3}-4\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$

بەرەنگاری

77 $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)^2$

78 $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}+8\right)^2$

79 $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-4\right)^2$

گەڕێدان

ئەندازە درێژی لایەکی ئەو چوارگۆشەیە دیاربکە کە ڕووبەرەکەی دەکاتە:

80 250m^2

81 144m^2

82 28m^2

جێبەجێکردنەکان

83 باخچەکان لەبەر دەرگای ماڵی شیرین باخچەیەکی چوارگۆشەیی هەیە ڕووبەرەکەی دەکاتە 676m^2، درێژی لایەکی چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە سادەبکە.

84 $\left(-a^2b^2\right)^3\left(a^4b^2\right)^3$

85 $\frac{x^5y^7}{x^2y^3}$

86 $\left(\frac{20x^3}{-4x^2}\right)^3$

ئەمانە لێکبدە.

87 $(2x-4)(2x-4)$

88 $(3d+5)(2d-6)$

89 $(6b+1)(3b-1)$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەو هێزانەی توانیان ڕێژەییە بۆ دەربڕینی ڕەگەکان بەکاردێن. بەشێوەی $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ دەنووسرێن

کاتێك a ژمارەیەکی سالب نییە، n ژمارەیەکی تەواوە کە لە 2 کەمتر نییە. بۆ نموونە:

$\sqrt[3]{27}=3$ چونکە $3^3=27$ و $\sqrt[4]{16}=2$ چونکە $2^4=16$

یاسای هێزەکان بۆسادەکردنی برەکان بەکاربهێنە. نموونەش بۆ ئەمە :

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=x^{\frac{8}{2}}=x^4$$

ئەمانە سادەبکە.

90 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4\left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}$

91 $(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2$

92 $\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^6(xy)^{\frac{1}{2}}$

بەش پرۆژەی

شێوازەکان لە پێدراوەکاندا

مرۆڤ شێوازەکانی بەکارهێناوە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە سەرەتاکانی بیرکردنەوەی بیرکاریانەدا. لەم پرۆژەدا شێوازەکان بەکاردەهێنرێن بۆ شیکارکردنی پرسیارە جۆراوجۆرەکان و بۆ قووڵ بوونەوەی زیاتر لە جیهانی جەبردا.

چالاکی 1



زانا گریگییەکان بایەخیان بە بنیاتنانی لاکێشەکان داوە و وایان داناوە کە ئاسوودەن بۆ سەیرکردن. ئەم لاکێشانەیان جیاکردۆتەوە بەپێی ڕێژەی درێژیان بۆپانیان (بە نزیکەی 1.618) و ناویان لێناون **لاکێشە زێڕینەکان Golden Rectangles** و ئەم ڕێژەیان ناوناوە بە **ڕێژەی زێڕین Golden Ratio**. دوای ئەوە زانایانی دەروونناسی گەیشتوونەتە ئەوەی کە مرۆڤ بەبێ هەستکردن ئەو شێوە لاکێشانەیان لا پەسندترە کە نزیکن لە لاکێشە زێڕینەکان. لەلایەکی ترەوە زانای بیرکاری ئیتاڵی فیبوناتشی ژمارەی یەك لەدواییەکی پێکهێناوە کە بە ناوی خۆیەوە ناسراون. ژمارەی یەکەمیان 1 و دووەمیان 2 بەڵام ژمارەکانی تر هەریەکیان دەکاتە سەرجەمی دوو ژمارەی پێش خۆی.

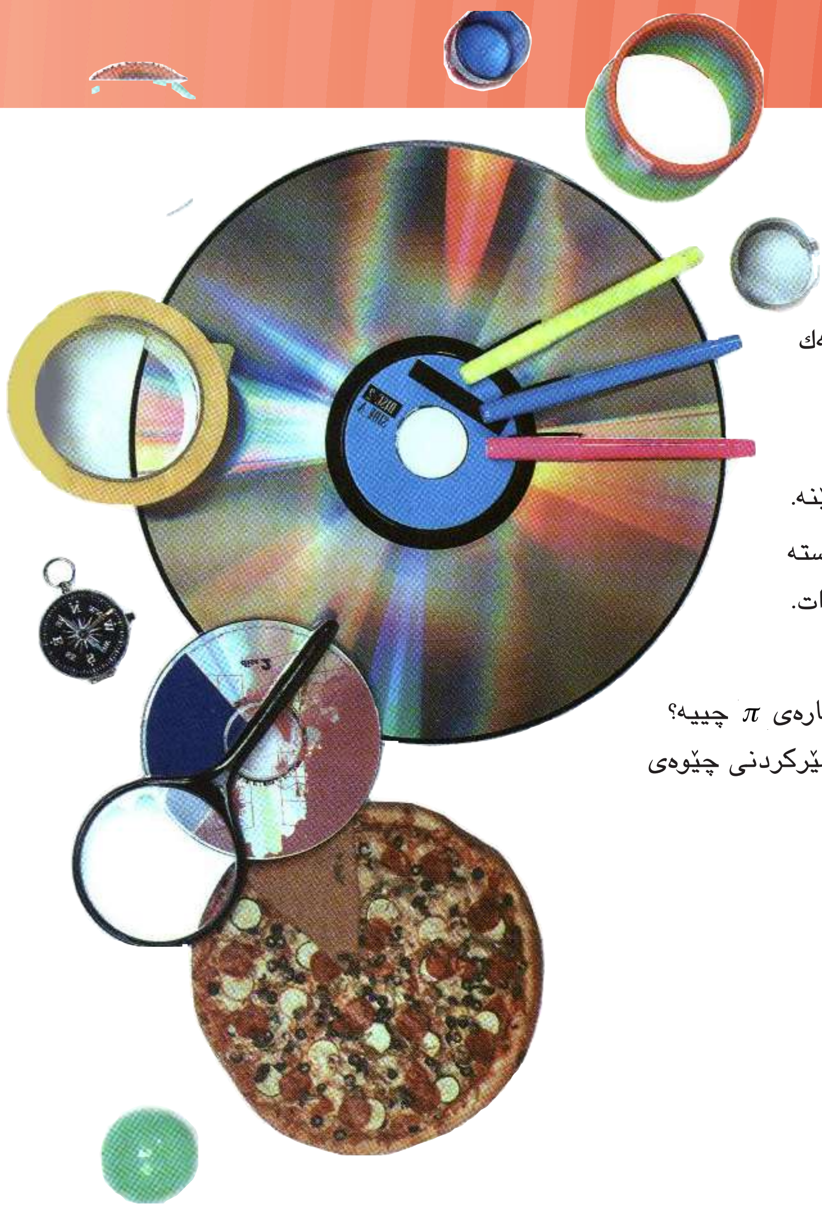
1. دە ژمارەی یەکەم لە ژمارەکانی فیبوناتشی بنووسە.
2. بژمێر بۆ تەواوکردنی خشتەکەی خوارەوە بەکاربهێنە، بۆ هەژمێرکردنی ڕێژەی هەر ژمارەیەك بۆ ژمارەکەی پێش خۆی.
3. وێنەی لاکێشەکان بکێشە کە درێژی و پانیان‌بریتین لە دوو ژمارەی یەك دوای یەکی فیبوناتشی. سانتیمەتر یان مللیمەتر بەکاربهێنە بۆ یەکەی درێژی.
4. بەراوردی ڕێژەی درێژی بۆ پانی لە هەر جارێکدا لەگەڵ ڕێژی زێڕین بکە.
5. کام لەم لاکێشانەی خوارەوە لە لاکێشەی زێڕین نزیکە.

ژمارەی فیبوناتشی	ژمارەی دوای ئەو	ڕێژەی ژمارەی دوا بۆ ژمارەکە
3	5	1.667
5	8	?
8	13	?
?	?	?
?	?	?
?	?	?

أ پسوولەی 3×5 ب وێنەی 5×7

ج وێنەی 5×8 د وێنەی 8×10

6. ئایا لەگەڵ ئەو کەسانەدایت کە دەڵێن چاو بە سەیرکردنی لاکێشە زێڕینەکان ئاسوودە دەبێت.



چالاکی 2

1. لەگەڵ هاورێکانتا 20 شێوەی بازنەیی هەڵبژێرە.
چێوە (c) و تیرە (d) بۆ هەریەکەیان بپێوە. خشتەیەك
بۆ پێدراوەکان دروستبکە.

2. ڕێژەی چێوە بۆ تیرە $\frac{c}{d}$ لە هەر بازنەیەك هەژماربکە.

3. جووتە ڕێکخراوی (d ، c) لە ڕووتەختی پۆتاندا بنوێنە.

4. ڕاستەیەکی ڕوون بەکاربهێنە بۆ وێنەکێشانی ئەو ڕاستە
هێڵەی گەورەترین ژمارەی خاڵدا یان بەنزیکیاندابڕوات.

5. لاری ئەو ڕاستەهێڵە هەژمێربکە.

6. پەیوەندی نێوان ئەو لارییەی هەژمێرت کردووە و ژمارەی π چییە؟
لەمەوە ڕێسایەك پوختە بکە کە ڕێت پێدەدات بە هەژمێرکردنی چێوەی
بازنە بە زانینی تیرەکەی. ئەو ڕێسایە چییە؟

1 پێداچوونەوە

لە پرسیاری **1** تا **5** یەکسانی سیفەتێك لە سیفەتەکانی کردارەکانی سەر ژمارە ڕاستییەکان دەردەبڕێت. کامانەن؟

1 $a(2b) = (2b)a$

2 $2 \times 1 = 2$

3 $b\left(\frac{1}{b}\right) = 1$

4 $3x + 0 = 3x$

5 $5(2 - x) = 5 \times 2 + 5(-x)$

بەهای بڕەکان لە پرسیاری **6** تا **9** هەژمێربکە

6 $(-1) \times (5+3)^2 - 11$

7 $\frac{(11-5)^2}{3\times2}$

8 $\frac{(6-12)^5}{-3^2}$

9 $\frac{32-(13+4)}{(-3)^2}$

ئابووری نرخی پێویست لەسەر سارا گەیشتە **88** هەزار دینار لە بەکارهێنانی ئینتەرنێتدا. و ئەم بڕە پارە بۆ هاوبەشیکردن و نرخەکەی کە **55** هەزار دینارە لە مانگێکدا و تێچوونی بەکارهێنانی ئینتەرنێت کە نرخی **3** هەزار دینارە بۆ هەر کاتژمێرێك.

10 هاوکێشەیەك بنووسە کە بڕی پارەی پێویست لەسەر سارا بنوێنێت کاتێك x هێمای کاتژمێرەکان بێت.

11 هاوکێشەکە شیکاربکە ژمارەی کاتژمێرەکان دیاربکە کە سارا ئێنتەرنێتی بەکارهێناوە.

12 هاوکێشەی $F = \frac{9}{5}C + 32$ شیکاربکە بە هەژمارکردنی C بەپێی F .

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە و کۆمەڵە شیکارەکانیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

13 $-4x > -18$ وە $-3x - 8 \leqslant 7$

14 $-3x < -5$ یان $4x - 3 < 29$

15 هەژمێری بەهای بڕی $\left(\frac{5^{-2}\times5^3}{5^2}\right)^2$ بکە.

بڕەکان لە پرسیاری **16** تا **18** سادەبکە.

16 $x^4(3x)^2$

17 $\frac{(ab^2)^3}{c^2}$

18 $\left(\frac{p^{-1}q^2}{p^{-2}}\right)^{-4} \times \left(\frac{p^{-3}q^{-3}}{p^{-3}q^{-1}}\right)^{-3}$

شیکاری سستەمی هاوکێشەکان بە لابردن بکە لەهەردوو ڕاهێنانی **19** و **20**.

19 $\begin{cases} 9x + 2y = 2 \\ 21x + 6y = 4 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2y = 3x - 6 \\ y = x - 2 \end{cases}$

شیکاری سستەمی هاوکێشەکان بکە بە لە جیاتیدانان لە هەردوو ڕاهێنانی **21** و **22** .

21 $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 7x - 5y = 14 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x + 10y = -2 \\ 6x + 4y = 20 \end{cases}$

بڕەکانی هەردوو ڕاهێنانی **23** و **24** سادەبکە.

23 $\sqrt{x^2y^4}\,(x^5y)^{\frac{1}{2}}$

24 $\frac{(24m^8n)^{\frac{1}{2}}}{(mn^2)^{\frac{1}{2}}}$

لە پرسیاری **25** تا **28** بڕەکان بە سادەترین شێوە بنووسە بەمەرجێك ژێرەیان ڕێژەیی بێت.

25 $\sqrt{\frac{5}{25}}$

26 $\sqrt{\frac{3}{49}}$

27 $\sqrt{\frac{16}{5}}$

28 $\sqrt{\frac{6}{14}}$

1

تاقیکردنەوەی بەش

بەجێبەجێکردنی ڕیزبەندی کردارەکان ئەم بڕانە هەژماربکە.

1. $5+2(7-4)^2$
2. $12-9\div 3+2\times 5$
3. $\frac{4+6}{2}+2\times 5$
4. $5\times 4\div 2+3^{(4-1)}$

ئەو سیفەتە کامەیە کە لە هەر جارێکدا بەکارهاتووە ئەگەر زانیت هەموو گۆڕاوەکان ژمارەی ڕاستین.

5. $5x\times 1=5x$
6. $7a-14=7(a-2)$
7. $\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)=1$
8. $4(xy)=(xy)\times 4$

هەر بڕێک لەمانە سادەبکە ئەگەر زانیت هەموو گۆڕاوەکان جیاوازن لەسفر.

9. $y^3(x^2y)$
10. $\frac{(9by)^2}{(3bxy)^3}$
11. $\frac{14x^{-3}a^4}{35x^5a^3}$
12. $\left(\frac{3x^4k^{-1}}{8x^{-2}k^3}\right)^{-2}$

13. **فیزیا** دەتوانین جولە ووزە بپێوین بە بەکارهێنانی ڕێسای $k=\frac{1}{2}mv^2$ بپێوین کاتێک m بارستایی بە کیلۆگرام و v خێرایی بە مەتر لە چرکەیەکدا و k جولە وزەیە بەجول. جولە ووزەی تەنێک چەندە کە بارستاییەکەی 100 کگم بێت وبە خێراییەکەی 5 م/چ دەجولێت.

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

14. $4x-3=17$
15. $\frac{x}{3}-2=16$
16. $2x-0.8=2.4$
17. $8x+4=2x-32$

18. **ئەندازە** بە دوو گۆشە دەووترێت تەواوکەری یەکترن کاتێک کۆی پێوانەکانیان بکاتە 90 پلە، هاوکێشەیەک بنووسە و شیکارییەکە بۆ هەژمێرکردنی پێوانەی هەریەک لە دوو گۆشەی یەکتر تەواوکەر. ئەگەر زانیت پێوانەی یەکێکیان 30 پلەی زیاترە لەوی تریان.

19. هاوکێشەی $m=\frac{1}{2}xk^2$ شیکاربکە بە هەژمێری k بەپێی دوو گۆڕاوەکەی تر.

هەریەک لەم لاسەنگانە شیکاربکە و شیکارەکەیان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

20. $-3x-6>15$
21. $2(4x-5)<6x-6$

هەریەکە لەم لاسەنگە ئاوێتانە شیکاربکە و شیکارەکە بە ڕوونکردنەوەی بنوێنە.

22. $(3x+4>7)\wedge(2x-3<5)$
23. $(5x\geq 3)\vee(-2+4x\leq 10)$

24. **بۆخۆشی** 5 مندال لەگەڵ 3 گەورەدا بۆ باخچەی ئاژەڵان چوون و 80 هەزار دیناریان پێبوو. لاسەنگەیەک بنووسە هەژمارکردنی بەزرترین ڕادەی بۆ نرخی بلیتی منداڵێک ئەگەر بزانیت بلیتی گەورە بە 14 هەزار دینارە. بەرزترین ڕادە چەندە؟

هەریەک لەم سیستمانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە و پاسادانی شیکارەکانیان بکە.

25. $\begin{cases}2x-3y=1\\ y=x-2\end{cases}$
26. $\begin{cases}x+y=3\\ 2x+3y=3\end{cases}$

27. **ژمارەکان** کۆی دوو ژمارە دەکاتە 7 . چوار ئەوەندەی یەکەمیان 1 ی زیاترە لە 5 ئەوندەی دووەمیان. ئەم دوو ژمارەیە دیاربکە بە ڕێگای نووسینی سیستمی هاوکێشەکان و شیکارییەکە.

هەر سیستمێک لەمانە بە لابردن شیکار بکە و پاسادانی شیکارەکە بکە.

28. $\begin{cases}x+y=1\\ x-2y=-8\end{cases}$
29. $\begin{cases}5x+2y=24\\ 2x-12=4y\end{cases}$
30. $\begin{cases}\frac{1}{3}x-y=4\\ 2x-6y=12\end{cases}$
31. $\begin{cases}4x+3y=0\\ y-x=-7\end{cases}$

32. **بەکارداچوون** نرخی 3 تێنووس و 4 پەرتووک دەکاتە 250 7 دینار و نرخی 5 تێنووس و 2 پەرتووک دەکاتە 600 6 دینار. هەژمێری نرخی هەریەکە لە تێنووس و پەرتووک بکە لە ڕێگای نووسینی سستەمی هاوکێشەکان و شیکارەکەی.

هەژمێری بەهای هەریەک لەم بڕانە بکە.

33. $\left(3\sqrt{81}\right)^2-31$
34. $\frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{9}\right)^3+\left(\sqrt{64}\right)^2+2\right)$

هەریەک لەم بڕانە سادەبکە و وای دابنێ کە بەهای هەموو گۆڕاوەکان موجەبن.

35. $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$
36. $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5}}$
37. $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$
38. $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

1

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەم ژمارانەی خوارەوە ڕێژەیی نییە؟

أ $178.259\,259...$ ب $\sqrt{7}$

ج $\sqrt{49}$ د -2315

2 کام ژمارە لەمانەی خوارەوە تەواوە؟

أ $17.\overline{259}$ ب $\sqrt{142}$

ج $(27)^{\frac{1}{3}}$ د $\frac{1235}{16}$

3 دوو ژمارەی -5 و 3.25 بە دوو خاڵ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە و دووری نێوانیان هەژمار بکە.

4 دوو ژمارەی $3.\overline{7}$ وە $-2.\overline{4}$ بە دوو خاڵ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنەو دووری نێوانیان هەژمێربکە.

5 یەکسانیەکەی $3+(5+7)=(3+5)+7$ ؟ چ سیفەتێکی کردارەکان دەردەبڕێت.

6 یەکسانیەکەی $2(a+b)=2a+2b$ ؟ چ سیفەتێکی کردارەکان دەردەبڕێت.

7 کرداری لێدەرکردن سیفەتی ئاڵوگۆڕی هەیە؟ بە نموونە ڕوونییکەوە.

8 نموونەیەك بهێنەرەوە ڕوونیبکاتەوە دابەشبوون سیفەتی ئاڵوگۆڕی نییە.

9 هاوکێشەی $4x-9=\frac{3x-15}{2}$ شیکاربکە.

10 گۆڕاوی b بەپێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە لە ڕێسای $x=\frac{ab-1780}{q}$.

11 ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە $\frac{3x-2.5}{5}-123=5.6(2.1x-12.4)+3.26$.

12 لاسەنگەی $-x+4\le 2(1-2x)$ شیکار بکە و لەسەر تەوەری ژمارەکان کۆمەڵە شیکارەکە بنوێنە.

13 کام لەم ژمارانە شیکار نییە بۆ لاسەنگەی $5x-6(x+9)<1$

أ 15 ب -35

ج 18.25 د -55

14 بەهای بڕی $27^{\frac{2}{3}}$ چەندە؟

أ 3.5 ب 3

ج 9 د 6

لە پرسیاری 15 تا 17 بەهای بڕەکە هەژمێربکە.

15 $75-\frac{3(4+12\div 2)^2}{3+2}$

16 $\frac{6^2\times 6^{-3}}{6^{-1}}$

17 $\left[3(1+2)+3\right]2^2$

18 بڕی $\left(\frac{2x^{-2}y^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-1}$ سادەبکە.

سیستمی دوو هاوکێشەکەی خوارەوە بە لەجیاتیدانان پاشان بە لابردن شیکاربکە.

19 $\begin{cases}11x+4y=-17\\ -6x+y=22\end{cases}$

20 $\begin{cases}1.5x+2y=9.5\\ 2.25x-0.5y=5.5\end{cases}$

21 ئایا بۆ سستەمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}2x-3y=11\\ 6x-9y=22\end{cases}$ شیکار هەیە.

22 بە لەجیاتیدانانی سیستمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}3x-3y=1\\ x+y=4\end{cases}$ شیکاربکە.

لە پرسیارەکانی 23 تا 26 بڕە ڕەگییەکان سادەبکە.

23 $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(-1+\sqrt{3}\right)$

24 $\left(3\sqrt{5}+2\right)-\left(3+2\sqrt{20}\right)$

25 $\frac{2}{\sqrt{15}}$

26 $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

بەشی دووەم

نەخشەکان

Functions

1. نەخشەکان.
2. نەخشەی هێڵی.
3. شێوەجیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ.
4. تەریببوون و ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان.
5. شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی.
6. نەخشەی ڕووت.
7. هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە.

پڕۆژەی بەشەکە.

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 2

نەخشەکان Functions

نەخشەکان لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردێت لە میانەی بەکارهێنانی هێندەکان بۆ دەربڕینی گۆڕانەکان و پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو، نموونە لەسەر ئەوە دەتوانرێ پەیوەندی نێوان خێرایی سوڕانەوەی شەمەندەفەر و ئەو هێزەی سەرنشینەکان لە شوێنەکانیان جێگیردەکات بەهۆی نەخشە بنوێنرێت.



وانەکان



دەربارەی پرۆژەی بەش

پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە زۆرجار ئاڵۆزن. یان هەندێ هۆکار کە کاریان تێدەکەن نەزانراون. لەبەرئەو هۆیە مرۆڤ نموونە بیرکارییەکان بەکاردەهێنێت بۆ نواندنی ئەو جۆرە پرسیارانە و خەملاندنی شیکارە چاوەڕوانکراوەکان دەکات. لەمیانەی ئەنجامدانی کارەکانت نەخشە بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ئەو نموونە بیرکاریانەی پەیوەستن بەزیادبوونی پاشەڕۆی بۆشایی (گەردون) کە بەدەوری زەوی دەخولێتەوە.

پاش تەواوبوونت لە پرۆژەی ئەم بەشە توانات دەبێت لەسەر:

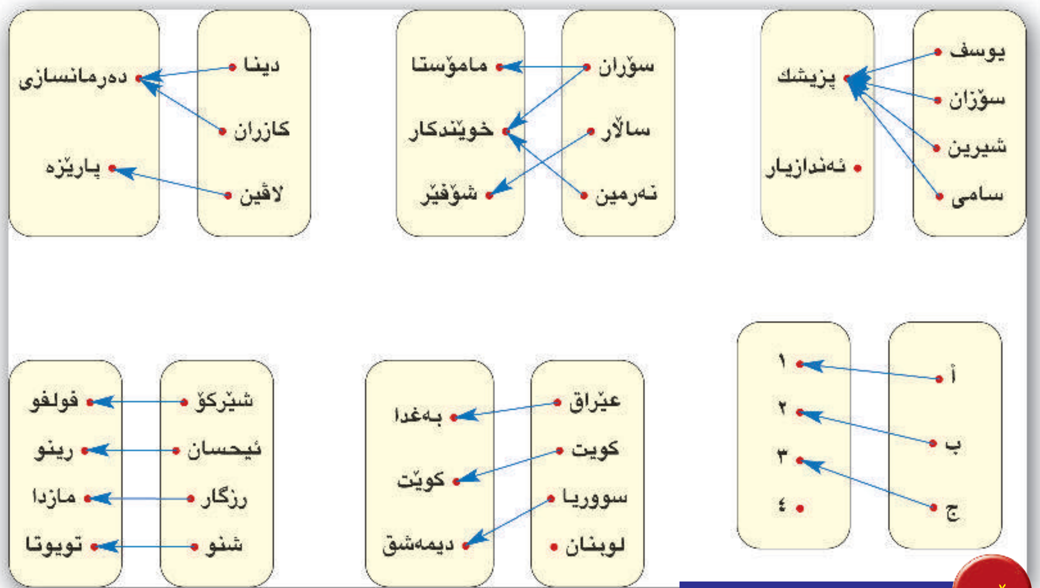
- بەکارهێنانی خشتە بۆ نواندنی پەیوەندی نێوان کات (بەساڵ) و هێندی پاشەڕۆی بۆشایی و دیاریکردنی نەخشەی گونجاو کە نموونەی بیرکاری ئەو پەیوەندییە پێکبهێنێ.
- دۆزینەوەی چەند نموونەیەك بۆ لێکۆڵینەوە لەسەر کۆبوونەوەی جۆرە جیاوازەکانی پاشەڕۆیەکانی بۆشایی و لێکۆڵینەوەیان.
- دیاریکردنی جۆرە نەخشەیەك بۆ لێکۆڵینەوەی پەیوەندی نێوان بەرزی و هێندی پاشەڕۆی بۆشایی لەو بەرزیەدا.



وانەی 1

نەخشەکان

Functions



بۆچی

نەخشەکان و پەیوەندییەکان بەزۆری بەکاردێن بۆ بنیاتنانی نموونەی بیرکاری کە ژیانی ڕۆژانە یان یاسای زانستی دەردەبڕن.

ئامانجەکان

- نواندنی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو بە ڕوونکردنەوەیی.
- دیاریکردنی بواری پەیوەندییەکە و مەوداکەی.
- بڕیاردانی ئەوەی کە ئایا پەیوەندییەکە نەخشە دیاریدەکات.
- هەژمێرکردنی بەهای نەخشە کاتێک گۆڕاوەکە بەهای دیاریکراو وەردەگرێت.

چالاکی

پەیوەندییەکان و نەخشەکان Relations and function

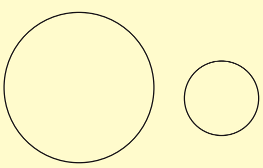
1. کازران پەڕاوی تەلەفۆنی کردەوە و بینی:



ناو	ژمارەی تەلەفۆن
شکری	235 246
هیوا	456 987
خەسرەو	852 369
شایان	369 852
ڤیان	741 236

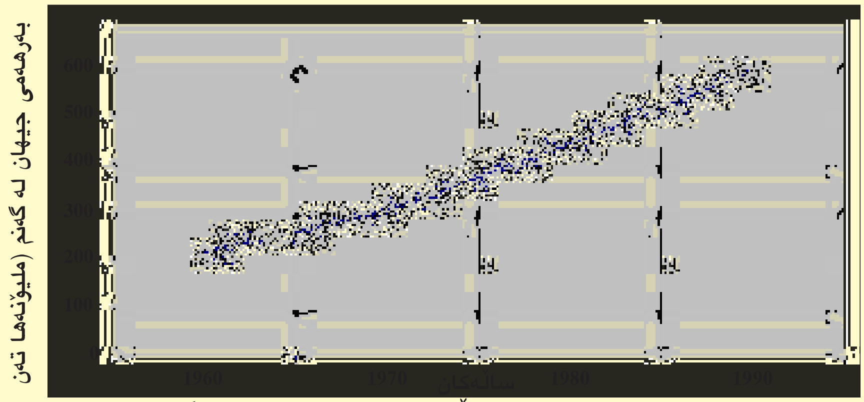
ژمارەی تەلەفۆنی ڤیان چەندە؟ ژمارەی تەلەفۆنی خسرەو چەندە؟

2. بژمێر بەکاربێنە بۆ تەواوکردنی ئەو خشتەیەی دێت کە ڕووبەری بازنەت دەداتێ بەپێی بەها جیاوازەکانی نیوەتیرەکەی، پاشان ڕوونیبکەوە چۆن خشتەکەت تەواوکرد.



نیوەتیرە	1	1.5	4	0.5	0.75	3	0	2.5	10
ڕووبەر	3.14								

3. ئەم وێنە ڕوونکردنەوەی خوارەوە پێشکەوتنی بەرهەمی جیهانی گەنم لە نیوەی دووەمی سەدەی بیستەم بە ملیۆنەها تەن ڕووندەکاتەوە.



وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی بەرهەمی جیهانی گەنم بۆ ئەوەی ئەو خشتەیەی دێت تەواوبکەیت.

ساڵ	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
بڕی بەرهەمی گەنم	220						

4. ئەم خشتەیەی دێت تێکڕای پلەکانی گەرمی لە کەرکوك لە هەفتەی یەکەمی مانگی نیسان دیاردەکات.

ڕۆژانی حەفتە	شەممە	یەکشەممە	دووشەممە	سێ شەممە	چوارشەممە	پێنجشەممە	هەینی
تێکڕای پلەی گەرمی	25	24	23	20	22	24	25



تێکڕای پلەی گەرمی ڕۆژی یەکشەممە چەندبووە؟

تێکڕای پلەی گەرمی ڕۆژی چوارشەممە چەندبووە؟

ڕۆژی پێنج شەممە چەندبووە؟

ئەگەر چوار نموونەی پێشووت پشکنی دەبینیت هەریەکەیان دوو گۆڕاوی تێدایە. و بەهای یەکێك لەو دوو گۆڕاوانە بەهای ئەوی تریان دیاریدەکات.

خاڵی چاودێری ✔

5.ئەم خشتەیەی دێت تەواوبکە بەدیاریکردنی گۆڕاوی یەکەم لەهەر نموونەیەك کە بەهای گۆڕاوی دووەم دیاردەکات.

نموونە	گۆڕاوی یەکەم	گۆڕاوی دووەم
1		
2		
3		
4		

باس لەهەبوونی پەیوەندی **Relation** نێوان دوو گۆڕاوی x و y دەکات، ئەگەر بەهاکانی یەکێکیان زانراو بێت وەك x ئەوا بەهاکانی دووەم y دیاریدەکات، لەو بارەدا دەڵێین گۆڕاوی یەکەم گۆڕاوێکی ئازادە **Independent Variable** و دووەم گۆڕاوێکی پەیوەستە **Dependent Variablde**.

Functions نەخشەکان

لە نموونەی یەکەم دوودڵ دەبیت لە وەڵامی ئەو پرسیارە: **نمرەی تەلەفۆنی خەسرەو چەندە؟** چونکە گۆڕاوی ئازادەکە **ناوە**، دوو بەهای گۆڕاوی پەیوەستی لە بەرامبەرە. بەڵام لە نموونەکانی تر، تۆ تووشی ئەم کێشەیە نابیت چونکە هەر بەهایەکی گۆڕاوی ئازاد بەرامبەر تەنها یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستە.

> بە پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوی x و y دەڵێت **نەخشە Function** ئەگەر هەر بەهایەکی وەك a لە بەهاکانی گۆڕاوی x تەنها یەك بەهای وەك b لە بەهاکانی گۆڕاوی y بەرامبەری بێت، ئەو بەها تاکانەی b پێی دەوترێت **وێنەی Image** نەخشەکە بە گۆڕاوی یەکەم دەوترێ **گۆڕاوی ئازاد** و گۆڕاوی دووەم **پەیوەست**.

خاڵی چاودێری ✓

سەر لەنوێ چوار نموونەکە شیبکەوە، و لەهەر بارێکدا دیارییکە پەیوەندیەکە نەخشەیە یان نا، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نموونە 1

ئایا پێدراوەکانی ئەم خشتەیە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

.A

بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد x	بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست y
1	−3.6
2	−3.6
3	4.2
4	4.2
5	10.7
6	12.1
52	52

.B

بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد x	بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست y
3	7
3	8
3	10
4	42
10	34
11	18
52	52

شیکار

.A پێدراوەکانی خشتەی یەکەم نەخشە دەنوێنن چونکە هەر بەهایەك لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد x یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستی y بەرامبەریەتی.

.B پێدراوەکانی خشتەی دووەم نەخشە نانوێنن، چونکە بەهای 3 بۆ گۆڕاوی ئازاد سێ بەهای گۆڕاوی y کە 7، 8، 10 بەرامبەریەتی واتە خشتەی b تەنها پەیوەندی دەنوێنێت.

Different Ways to define a function شێوەکانی پێناسەی نەخشە

ئەگەر بڕوانیتە نموونەکانی پێشوو دەبینیت زۆر شێوە بۆ پێناسەی نەخشە هەیە دەتوانین پێناسەی نەخشە بکەین بەهۆی:

1. **خشتەی بەهاکان Table of Values** : نەخشە پێناسەدەکرێت لەم بارەدا بەهۆی خشتەیەکی دوو ستوونی، یەکەمیان بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد بگرێتە خۆی، و ئەویتریان بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەستی بەرامبەریان بگرێتەوە، بە مەرجێك بەهای گۆڕاوی ئازاد و بەهای گۆڕاوی بەرامبەری لەهەمان ڕیز بنووسرێت.

نموونە : نەخشەی نموونە 1

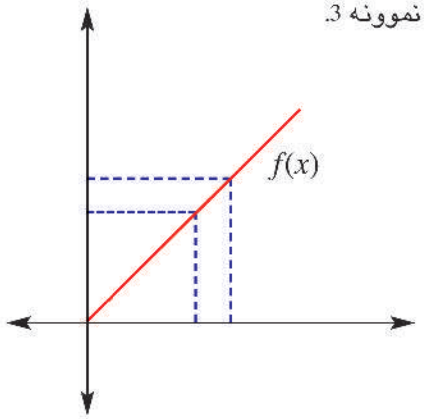
پەیوەندیەکی پێناسکراو بەهۆی خشتەوە نەخشە پێك ناهێنێت، ئەگەر ستوونی گۆڕاوی ئازاد بەهایەك بگرێتەخۆ لە بەرامبەری دوو بەهای جیاواز بۆ گۆڕاوی پەیوەست هەبێت.

لێرەوە پەیوەندی پێناسەکراو بەهۆی خشتەوە لە نموونەی یەکەم نەخشە نانوێنێت، چونکە بەهای گۆڕاوی ئازاد (خەسرەو) دوو بەهای جیاوازی گۆڕاوی بەستراو (ژمارەی تەلەفۆن) بەرامبەریەتی.

2. **ڕێسا Rule**: نەخشە پێناسەدەکرێت بەهۆی ڕێسایەك یان یاسایەك، کە بەهای گۆڕاوی پەیوەست بەپێی گۆڕاوی ئازاد دەردەبڕێت.

نموونە : نەخشەی نموونەی دووەم کاتێك بەهای گۆڕاوی پەیوەست A (ڕووبەری بازنە) دەردەبڕێت بەپێی گۆڕاوی ئازاد نت (نیوە تیرە) ئەم ڕێسایە ئەمەیە: $A(r)=\pi r^2$

3. **وێنەی ڕوونکردنەوەیی Graph** پێناسەدەکرێت بەهۆی وێنەی ڕوونکردنەوەیی کاتێك بەهای گۆڕاوی ئازاد لەسەر تەوەرەی سینەکان و بەهای گۆڕاوی پەیوەست لەسەر تەوەرەی صادەکان y بن. بەهای گۆڕاوی پەیوەست کە بەرامبەر بەهای گۆڕاوی x لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد تانی ئەو خاڵە دیاریدەکات کە لەسەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکەیە کاتێك پۆی سینی خاڵەکە دەکاتە x . نموونە: نەخشەی نموونە 3.



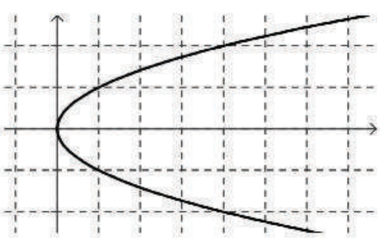
تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ستوونی Vertical Line Test

ئەگەر ڕاستەهێڵێکی ستوونی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی لە خاڵێك زیاتر بڕی، ئەوا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییە نەخشە نانوێنێت.

نموونە 2

أ ئایا وێنەی ڕوونکرنەوەیی بەرامبەر نەخشەیە؟ ڕوونبکەوە.

شیکار



أ نەخێر نەخشە نیە چونکەبۆ هەر بەهایەکی موجەب x دوو بەهای گۆڕاو y بەرامبەرە ، هەروەها ڕاستەهێڵی ستوونی وێنەکە لە دوو خاڵی جیاواز دەبڕێت .

لێکۆڵینەوەی نەخشەکان Studying Functions

بۆ لێکۆڵینەوەی نەخشەیەکی وەک $f(x)$، پێویستە ئەم خاڵانە جێبەجێبکەیت:

1. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە راستییەکانی گۆڕاوی ئازاد x کە دەتوانیت هەژمارەی وێنەکەی $y = f(x)$ بکەیت. ئەو کۆمەڵەیە پێی دەوترێ بواری پێناسەی نەخشەکە یان بەکورتی **بواری نەخشەکە Domain**.
2. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە راستییەکانی گۆڕاوی پەیوەست دەیگرێتەوە، وپێی دەوترێت **مەودای نەخشەکە Range**.
3. نواندنی نەخشەکە بە رووونکردنەوەی. واتە نواندنی هەموو جووتە ڕیکخراوەکانی (x,y) کاتێك x دانە بێت لەبواری نەخشەکە و $y = f(x)$ کۆمەڵەی ئەو خاڵانە پێیان دەوترێت **هێڵی رووونکردنەوەی نەخشەکە Graph**.
4. پوختەکردنی سیفەتەکانی نەخشە لەمیانی لێکۆڵینەوەی هێڵی رووونکردنەوەیی.

چۆن هێڵی رووونکردنەوەیی نەخشەیەك دروستدەکەیت

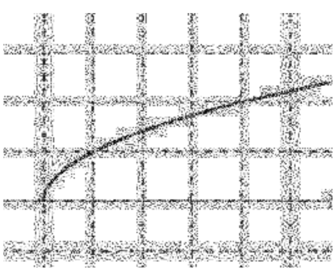
ئەگەر نەخشەکە بەهۆی خشتەی بەهاکان پێناسە کرابێت، هەموو خاڵەکانی (x,y) کە لە خشتەکەدا هاتووە بنوێنە، پاشان ئەو خاڵانە بە هێڵێکی گونجاو بگەیەنە.

بەرەنگاری

ئەگەر نەخشەکە بە ڕێسا پێناسەکرابێت، خشتەی بەهاکانی نەخشەکە پێکبهێنە و خاڵەکانی بنوێنە و هێڵی رووونکردنەوەییەکەی بکێشە بەرێگای پێشوو. هەروەها دەتوانیت بە بەکارهێنانی بژمێری رووونکردنەوەیی یان کۆمپیوتەر هێڵی رووونکردنەوەی نەخشەکە بکێشیت.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا



1. جیاوازی نێوان نەخشە و پەیوەندی ڕوونبکەرەوە، نموونەیەك لەسەر وێنەی رووونکردنەوەیی بۆ پەیوەندییەك بهێنەرەوە نەخشە نەبێت.
2. سێ ڕێگا بۆ پێناسەکردنی نەخشە باسبکە.
3. چۆن بواری نەخشەی پێناسەکراو بەهێڵی رووونکردنەوەیی بەرامبەر دیاردەکەیت، و چۆن مەوداکەی دیاریدەکەیت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەو خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

4

x	y
5	3
8	4
5	7
9	2

5

x	y
0	3
1	8
2	8
3	−7

6

x	y
10	7
20	11
30	9
40	7

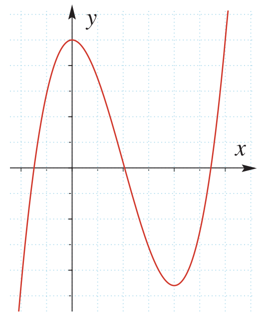
7

x	y
3	9
2	2
8	−3
2	1

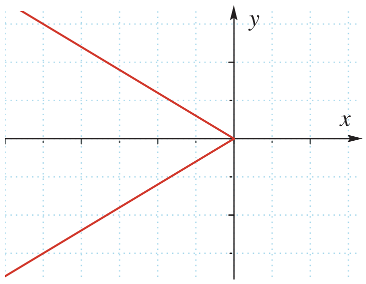
دیاریبکە ئەگەر ئەو وێنە رووونکردنەوییانە نەخشە دەنوێنن یان نا، هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

دیاریبکە ئەگەر ئەو وێنە ڕوونکردنەوییانە نەخشە دەنوێنن یان نا، هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

8



9

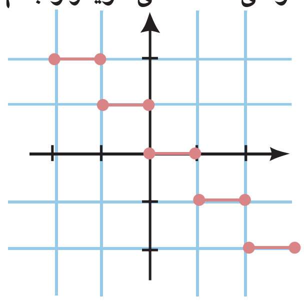


جێبەجێکردنەکان

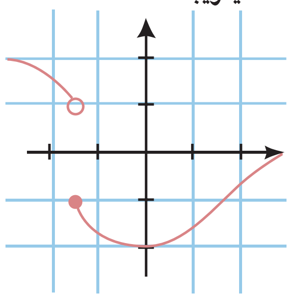
10 ئۆتومبیلەکان گۆڕاوی A ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنێت کە ڕێگایان پێدراوە لەشارەکەتدا ڕێبکەن و گۆڕاوی N تابلۆی ژمارەیی ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنێت. ئایا پەیوەندیەك لەنێوان A و N دا هەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت «بەڵێ»یە ئایا ئەو پەیوەندیە نەخشەیە؟ کام لە دوو گۆڕاوەکە و گۆڕاوی ئازادە و کامیان گۆڕاوی پەیوەستە؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە؟

بوار ومەودای نەخشەی نوێنراو بەم وێنە ڕوونکردنەوەیانە دیاریبکە.

11



12



13 بەهای نەخشەی $f(x)=x^2+2x-1$ هەژمێربکە کاتێك $x=3$ و کاتێك $x=1.5$.

جێبەجێکردنەکان

14 داهات زێڕنگرێك 24 هەزار دینار لەهەر کاتژمێرێکی کاردا وەردەگرێت، سەرەرای 20 هەزار دینار بۆ پشکنین ودۆزینەوەی تێکچوونەکان.

أ نەخشەیەك بنووسە داهاتی زێڕنگرەکە R بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکانی کار x بنوێنێت.

ب داهاتی زێڕنگرەکە هەژمێربکە ئەگەر 5.5 کاتژمێر کاربکات.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئایا ئەم خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەرەوە.

15

x	0	2	2	4
y	3	–5	1	7

16

x	1	2	3	4
y	6	6	9	9

17

x	4	4	6	6
y	–2	2	–3	3

18

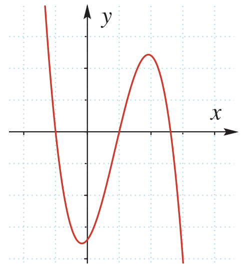
x	–5	–3	–1	1
y	8	8	–2	–2

19

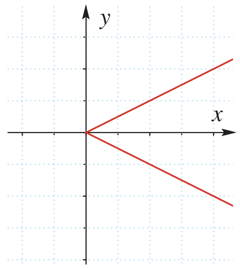
x	–2	–2	0	2
y	–5	–3	4	6

ئایا ئەو وێنە ڕوونکردنەوانەی خوارەوە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەرەوە.

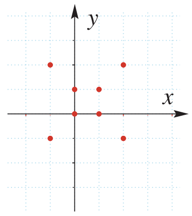
20



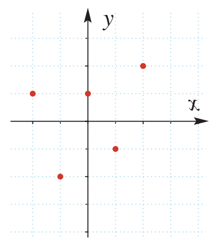
21



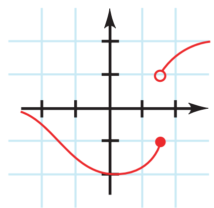
22



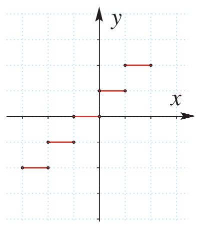
23



24



25



بەهای نەخشەکە بەلەجیاتیدانان هەژمێربکە.

26 کاتێك $f(x)=2x-6$ $x=1$ و کاتێك $x=3$.

27 کاتێك $f(x)=5-3x$ $x=1$ و کاتێك $x=3$.

28 کاتێك $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ $x=-9$ و کاتێك $x=1$.

29 کاتێك $f(x)=\frac{x-4}{5}$ $x=-9$ و کاتێك $x=9$.

30 کاتێك $f(x)=2x^2-3x$ $x=3$ و کاتێك $x=-2.5$.

31 کاتێك $f(x)=-x^2+4x-1$ $x=2$ و کاتێك $x=1.5$.

32 کاتێك $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ $x=-1$ و کاتێك $x=\frac{3}{4}$.

33 کاتێك $f(x)=-4x^2$ $x=\frac{3}{2}$ و کاتێك $x=-2$.

هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بە بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە لە پاشان بوار و مەودای دیاریبکە.

34 $y=-\frac{x}{2}$ **35** $y=-\frac{2}{3}x-5$ **36** $y=-2x^2$ **37** $y=\left(\frac{x}{2}\right)^2$

38 $y=2$ **39** $y=-6$ **40** $y=x^2$ **41** $y=x^2+2$

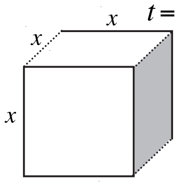
42 هێڵی ڕوونکردنەوەی بۆ نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-3\le x\le 3$ و مەوداکەی $-5\le y\le 5$ بێت.

43 هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-2\le x\le 5$ و مەوداکەی $0\le y\le 4$ بێت.

بەرەنگاری

بەهای نەخشەی $f(t)=t^2-3$ لەهەر بارێکدا هەژماربکە.

44 $t=\sqrt{2}$ **45** $t=\sqrt{2}-1$ **46** $t=c+\sqrt{2}$



ئەندازە هێمای گۆڕاوی V بۆ قەبارەی شەشپاڵوی بەرامبەر دابنێ.

47 نەخشەیەك بنووسە قەبارەی شەشپاڵوی V بەپێی درێژی لایەکی x بداتێ.

48 ڕووبەری ڕوویەك لە ڕووەکانی شەشپاڵوکە هەژماربکە کاتێك قەبارەکەی 27m^3 بێت.

49 **بەکارچوون** بەهای بژمێرەکان زۆر بەخێرایی دادەبەزێت، دەزگایەك وای دانا کە بەهای بژمێر لە هەر ساڵێکدا بەتێکڕای 15% لەنرخی بنەڕەتی دادەبەزێ.

أ نەخشەیەك بنووسە کە بەهای بژمێرێکت بداتێ بەپێی تەمەنی بەسا، ئەگەر زانیت دەزگاکە نرخی 200 3 دیناری نرخەکەی دەدات.

ب نرخی بژمێرەکە پاش سێ ساڵ دەبێتە چەند؟

50 **بەکارچوون** فرۆشگایەکی جلوبەرگ داشکانێکی بەڕێژەی 30% بۆ هەموو جلوبەرگەکان ئاشکراکرد.



أ دانا 47.25 هەزار دیناریدا بۆ نرخی کراسێك لەوەرزی داشکاندا، نرخی کراسەکە لە بنەڕەتدا چەند بووە؟

ب زانا پانتۆڵێکی کڕی نرخەکەی 25 هەزار دیناربوو پێش وەرزی داشکان، نرخە نوێیەکەی چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بە شێوەی $y = mx + b$ بنووسە ،بەزانینی لاریەکەی m و خاڵێکی وەك A پێیایدا دەڕوات.

51 $m = 5$ $A(2, 3)$

52 $m = -3$ $A(4, 1)$

53 $m = \frac{1}{5}$ $A(4, -1)$

54 $m = -\frac{2}{3}$ $A(-8, -3)$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لەسەر شێوەی $y = mx + b$ ، بەزانینی دوو خاڵ کە پیایدا دەڕوات.

55 $(1, 4); (-3, 0)$

56 $(0, 2); (-1, 1)$

57 $(2, 3); (0, 0)$

58 $(-2, -5); (5, -1)$

59 بڕەی $3[2 - (5 - 3) - 7] \div 2$ بە بەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژمار بکە.

ڕوانین بۆ پێشەوە

60 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ پەیوەندی $y = x^2 - 3x - 10$ پێکبهێنە لە نێوان x و y ، ڕوونبیکەرەوە بۆچی ئەم پەیوەندیە نەخشە دەنوێنێت، بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاربکە.

وانەی 2

نەخشەی هێڵی Linear Functions



بۆچی نەخشەی هێڵی سادەترین نەخشەی جەبرییە و هەروەها لە بنیاتنانی نموونەکانی بیرکاری لەبارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا زۆر بەکاردێن.

ئامانجەکان

- نەخشەی هێڵی دەناسێت.
- نەخشەی هێڵی بۆ بنیاتنانی سامپڵەکانی بیرکاری بەکاردەهێنێت.
- بواری نەخشەی هێڵی و مەوداکەی و خاڵەکانی یەکتربڕینی لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکاندا دیاریدەکات.

جێبەجێکردنەکان

فیزیا

چالاکی

دۆزینەوەی نەخشەی هێڵی Exploring linear function

دەزانیت کە پلەی کوڵانی ئاو 100 پلەی سەدییە. بەڵام ڕەنگە نەزانیت کە 100 پلەی سەدی پلەی کوڵانی ئاوە لە شوێنێك لەئاستی ڕووی دەریابێت (بەرزییەکەی لە ڕووی دەریا سفر بێت) پلەی کوڵانی ئاو دەگۆڕێت بەگۆڕانی بەرزی شوێنەکە لە ڕووی دەریاوە. ئەو پلەیە لەسەر چیاکانی هیمالایا کەمترە لە 100 پلەی سەدی بەڵام زیاترە لە 100 پلەی سەدی لەدەریای مردوو. ئەم خشتەیەی دێت هەندێك شوێنی جیهان و بەرزییەکانی دیارکردوە، لەئاستی ڕووی دەریا وپلەی کوڵانی ئاو تێیاندا.

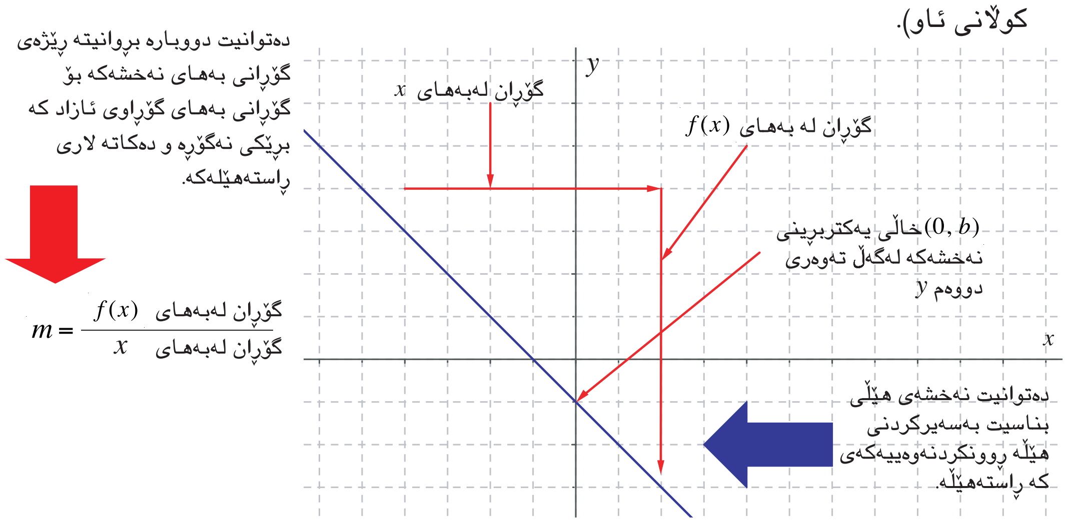
ناو	بەرزی لەڕووی دەریاوە	پلەی کوڵانی ئاو
بەسرە (عیراق)	0	100
فریبورغ (سویسرا)	586	99.68
سوفەر (لبنان)	1 250	99.315
کۆلۆرادۆ (ئەمریکا)	1 832	98.995
قورنە سەودا (لبنان)	3 220	98.23
دەریای مردوو	−420	100.23

1. پێدراوەکانی خشتەکە لە ڕووتەختی پۆتاندا بنوێنە کە تەوەری یەکەم x بۆ بەرزی لەڕووی دەریا بە مەترە، و تەوەری دووەم y بۆ پلەکانی گەرمی بە پێوەری سەدی دابنێ.
2. نێوان خاڵەکان بە پارچە ڕاستەهێڵ بگەیەنە، چی تێبینی دەکەیت؟
3. ئایا پەیوەندی نێوان بەرزی لەڕووی دەریا و پلەی کوڵانی ئاو نەخشەیە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
4. وێنە ڕوونکردنەوەییە دەستکەوتووەکەت بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی پلەی کوڵانی ئاو لەبەرزی 3000 مەتر لەڕووی دەریاوە.
5. وێنە ڕوونکردنەوەییە دەستکەوتووەکەت بەکاربهێنە، بۆ خەمڵاندنی بەرزی شوێنێك لەڕووی دەریا، ئەگەر بزانیت پلەی کوڵانی ئاو تیایدا 97 پلە بێت.
6. لەکوێدا وێنە ڕوونکردنەوەکە تەوەری y دەبڕێت؟ ئەم خاڵە چی دەنوێنێت؟

نەخشەی هێڵی Linear Function

نەخشەی هێڵی نەخشەیەکە، ڕوونکردنەوەییەکەی هێڵێکی ڕاستە، ڕێسای نەخشەی هێڵی بەم شێوەیە دەنووسرێت $f(x)=mx+b$.

دەتوانیت نەخشە هێڵییەکان بۆ بنیاتنانی نموونەی بیرکاری بەکاربێنیت بۆ هەندێ لە پەیوەندییەکانی نێوان دوو گۆڕاو وەك پەیوەندییەکەی پێشوو (بەرزی لەڕووی دەریا و پلەی کوڵانی ئاو).

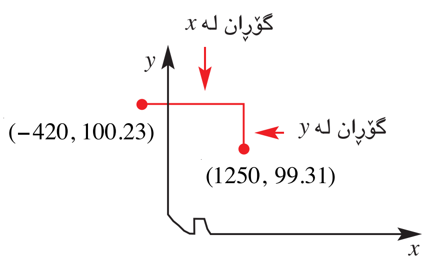


ڕێژەی گۆڕانی بەهای نەخشەی هێڵی $f(x)$ بۆ گۆڕانی بەهای x نەگۆڕ دەمێنێتەوە وئەو ڕێژەیە پێی دەوترێت لاری **Slope** نەخشەی هێڵی.

نموونە 1

أ پێدراوەکانی خشتەی لاپەڕەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی چۆنیەتی گۆڕانی پلەی کوڵانی ئاو کاتێك بەرزی لەڕووی دەریا دەگۆڕێت.

ب ڕێسای نەخشەی پلەی کوڵانی ئاو بەپێی بەرزی لەڕووی دەریاوە بنووسە.



شیکار

أ x بەکاربێنە بۆ بەرزی بە مەتر لەڕووی دەریا و y بۆ پلەی کوڵانی ئاو بەپێوەری سەدی. دوو بەها بۆ گۆڕاوی سەربەخۆی x بەکاربهێنە و دوو بەها بۆ نەخشەی بەرامبەریان وەك بەرزی سوفەر لە لوبنان و دەریای مردوو لە ئوردن. ڕێژەی گۆڕانی پلەی کوڵانی ئاو بۆ گۆڕانی بەرزی لەڕووی دەریا هەژمێربکە بۆ ئەوەی لاریت دەستکەوێ.

ڕێژەی گۆڕان $m = \frac{\text{گۆڕان لە نەخشە}}{\text{گۆڕان لە } x} = \frac{99.31-100.23}{1250-(-420)} = -0.00055$

ئەمەش واتە زیادبوونی مەترێك لەبەرزی لەڕووی دەریا دەبێتە هۆی گۆڕان لەپلەی کوڵانی ئاو بەبڕی -0.00055 پلە.

ب پلەی کوڵانی ئاو = پلەی کوڵانی ئاو لە ئاستی ڕووی دەریا + ڕێژەی گۆڕان × بەرزی.

$$f(x) \quad = \quad 100 \quad +(-0.00055)x$$

کەواتە ڕێسای نەخشەکە، $f(x)=100-0.00055x$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ئایا پلەی کوڵانی ئاو زیاددەکات ئەگەر بەرزی لەڕووی دەریاوە زیادبکات یان کەمدەکات؟
ڕوونیبکەرەوە چۆن خشتەکەی سەرەتای وانەکە بەکاردەهێنیت بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە.
ڕوونیبکەوە چۆن هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=100-0.00055x$ بەکاردەهێنیت.

بەرەنگاری

شارا ڕێسای نەخشەی هێڵی هەروەک لەبەرامبەردا هاتووە دۆزیەوە.
ڕێگاکانی شارا باسبکە.
دوو شوێنی تر لەخشتەکە بۆ دۆزینەوەی ڕێسای نەخشەکە بەکاربهێنە.
ئایا هەمان ڕێسا دەستدەکەوێت.

$m = -0.00055$
$f(x) = mx + b$
$f(x) = -0.00055x + b$
$100 = -0.00055 \times 0 + b$
$\Longrightarrow b = 100$
کەواتە ڕێسای نەخشەکە بریتییە لە:
$f(h) = -0.00055h + 100$

نموونە 2

هەژمێری $f(9)$ بکە کاتێک $f(x)=\frac{1}{3}x+17$ بەهای x چەندە ئەگەر $f(x)=-1$؟

شیکار

لەجیاتی x بەهای 9 دابنێ.

$$f(9)=\frac{1}{3}\times 9+17$$
$$=3+17$$
$$=20$$

لەجیاتی $f(x)$ بەهای -1 دابنێ و شیکاریبکە.

$$f(x)=\frac{1}{3}x+17$$
$$-1=\frac{1}{3}x+17$$
$$-18=\frac{1}{3}x$$
$$-54=x$$

بەرەنگاری

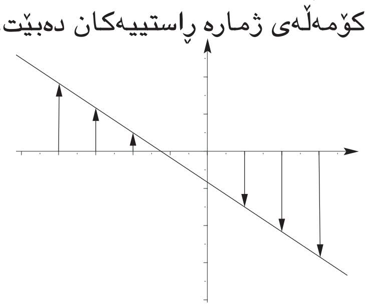
ڕوونیبکەرەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنی بۆ دیاریکردنی پلەی کوڵانی ئاو لە شوێنێک 8000 مەتر لەڕووی دەریاوە بەرزبێت، ئەو پلەیە دیاربکە.

بەرەنگاری

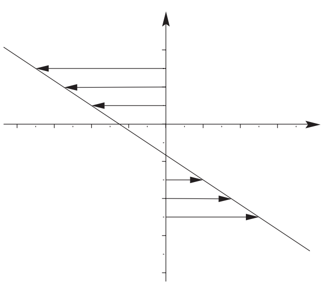
ڕوونیبکەرەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنیت بۆ دیاریکردنی بەرزی شوێنێک لەڕووی دەریا پلەی کوڵانی ئاو تێیدا 85 پلەی سەدی بێت، ئەو بەرزیە دیاریبکە.

خوێندنی نەخشەی هێڵی Studying linear function

ڕێسای نەخشەی هێڵی $f(x)=mx+b$ ڕێگادەدات بە هەژمێرکردنی بەهای نەخشەکە کاتێک بەهای گۆڕاوی $f(x)$ هەرچەند بێت. لەوەوە دەردەچێت کە نەخشەکە پێناسە دەکرێت لەهەر ژمارەیەکی ڕاستییدا، بەم پێیە بوارەکەی دەبێتە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان. بەشێوەیەکی تر لەوانەیە بۆ هەر ژمارەیەکی ڕاستی بەهایەکی نەخشەی هێڵی هەبێت، چونکە دەتوانی هەژمێری بەهای گۆڕاوی x بکەیت، ئەگەر بەهای نەخشەکە بزانی، لەوەوە دەردەچێت کە مەودای نەخشەی هێڵی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان دەبێت.



هێڵە ڕوونکردنەوەیی نەخشە هێڵییەکە دیاری دەکات کە بوارەکەی هەموو تەوەرەی x دەگرێتەوە.



هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هیڵیکە دیاریدەکات کە مەوداکەی هەموو تەوەرەی y دەگرێتەوە.

کاتێک نەخشەکە بارێکی ژیانی ڕۆژانە دەنوێنێت، بوار و مەودای نەخشەکە سنووردار دەبێت.

نموونە 3

لوتکەی ئیڤرست کە دەکەوێتە چیاکانی هێمالایا بەرزییەکەی 8848m مەترە لەڕووی دەریا بە بەرزترین شوێن لەڕووی زەوی دادەنرێت و هەروەها دەریای مردوو کە 420m مەتر لە ڕووی دەریا نزمە، بە نزمترین شوێنی ڕووی زەوی دادەنرێت، ئەو دوو زانیارییەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بەوردی بوار و مەودای نموونەی 1 دیاریبکەیت.

شیکار

نەخشەی نموونەی 1 نموونەیەکی بیرکاری پێکدێنێت، لە ڕاستیدا لەوەوە دەردەچێت کە گۆڕانی سەربەخۆ سنوردراوە بەچەند بەهایەکی دیاریکراو، بەپێی دوو زانیارییەکەی پێشوو ئەو بەهایانە وەردەگرێت کە دەکەوێتە نێوان 420–، 8848 لەبەرئەوە بواری نەخشەی نموونەی 1 کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی ئەو لاسەنگە $-420 \leq h \leq 8848$ پاسادان دەکات. بۆ دیاریکردنی مەودا لەم بارەدا دەبینین کە بەهایەکەی کەمدەکات هەر چەند بەرزی h زیادبکات، ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت کە بەرزترین بەهای بەرامبەر نزمترین بەهای گۆڕاوە ئازادەکەیە $f(-420)=100.23$ و نزمترین بەهای بەرامبەر بەرزترین بەهای گۆڕاوی x دەبێت واتە $f(8848)=95.13$ وهەروەها مەودای نەخشەی نموونە 1 کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەیە کە$95.13 \leq y \leq 100.23$ پاسادادەکات.

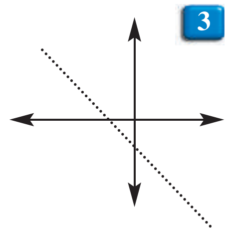
ڕاهێنــــــــــان

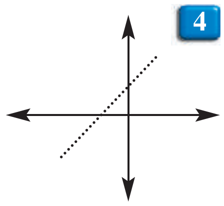
بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

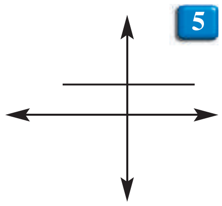
1 چۆن پاسادانی ئەوە دەکەیت کە خاڵێك پۆتانەکەی زانراو بێت دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵێك هاوکێشەکەی زانراوبێت.

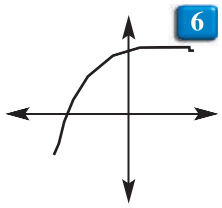
2 ڕوونیبکەوە چۆن ڕێسای نەخشەی هێڵی دەدۆزیتەوە بەزانینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی.

ئایا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە نەخشەی هێڵی دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

3 

4 

5 

6 

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئایا ئەم نەخشانە هێڵین؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

7 $f(x)=2-x^2$

8 $f(x)=-3x-6$

9 $g(x)=4+10x$

10 $f(x)=x^3-x$

11 $f(x)=\frac{3}{2}x+4$

12 $g(x)=\frac{1}{x}$

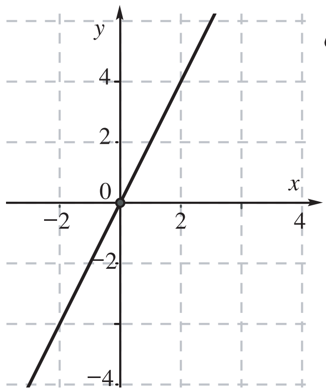
جێبەجێکردنەکان

بیرکاری بەکارچوون

13 خشتەی خوارەوە تێچوی پەیوەندی کردنەکانی مۆبایل دیاریدەکات لەگەڵ تێچوونە نەگۆڕەکەی کە بەهاکەی 2 سەنتە لەهەر خولەکێك.

ژمارەی خولەك	1	2	3	4	5	6
تێچوو بە سەنت	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

خشتەکە بەکاربێنە بۆ نووسینی نەخشەیەك، بوار و مەودای ئەو نەخشەیە دیاربکە.



14 وێنەی بەرامبەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی هێڵی دیاردەکات، خشتەی بەهاکانی پێکبهێنە و ڕێساکەی بنووسە.

جووتە ڕێکخراوەکە تەواوبکە بەمەرجێك خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y=-4x+21$.

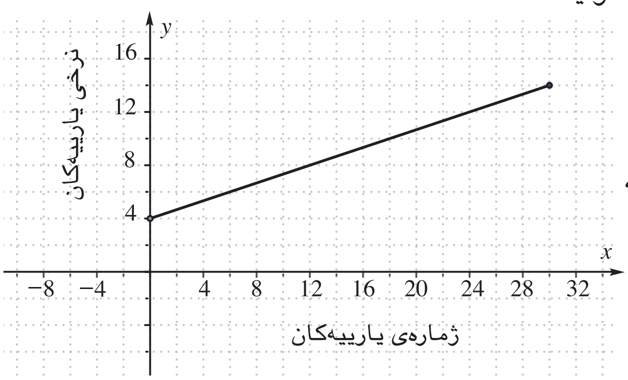
15	(5, ?)	**16**	(?, 9)
17	(0, ?)	**18**	(?, 0)

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جووتە ڕێکخراوەکە تەواوبکە بەمەرجێك خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y=2x-14$.

19	(8, ?)	**20**	(10, ?)	**21**	(0, ?)	**22**	(?, 0)
23	(5, ?)	**24**	(−5, ?)	**25**	(3, ?)	**26**	(?, 3)
27	(?, 6)	**28**	(?, −4)	**29**	(?, −7)	**30**	(?, 10)

31 **ئەندازەی پۆتان** وێنەی ڕوونکردنەوەیەکە پەیوەندی نێوان ژمارەی یارییە ئەلکترۆنییەکان (نێوان 0 و 30) ونرخەکەی دیاریدەکات، خشتەی بەهاکانی ئەم نەخشەیە پێکبهێنە و ڕێساکەی بنووسە.



32 **ئوتومبێلەکان** کاتێك تانکی سووتەمەنی ئوتومبێلەکەت پڕ دەکەیت، بڕی سووتەمەنی لە تانکیەکە نەخشەیەکە، گۆڕاوە سەربەخۆیەکەی ژمارەی خولەکەکانە وای دابنێ کە ئەو سووتەمەنییەی دەڕژێتە ناو تانکیەکە بە تێکرای 18 لیترە لەهەر خولەکێکدا و فراوانی تەنکیەکە دەگاتە 35 لیتر.

أ ڕێسای نەخشەیەك بنووسە بڕی ئەو سووتەمەنییەی کە دەڕژێتە ناو تانکیەکە بەپێی کات بنوێنێت.

ب بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریبکە.

33 **بۆخۆشی** یانەی گەنجان CD دەفرۆشێت وەك لەو خشتەیەی دێت دیارکراوە، لەگەڵ پارەی بەشداربوونی لەیانەکە کە بریتییە لە 25 هەزار دینار.

ژمارەی CD	0	2	4	6	8	10	12	14
تێچوون	25	45	65	85	105	125	145	165

نەخشەیەك بنووسە ئەمە بنوێنێت؟

34 **بۆخۆشی** یانەی ژیان CD دەفرۆشێت وەك لەم خشتەی خوارەوە دیاریکراوە لەگەڵ پارەی بەشداربوون لە یانەکەدا کە دەگاتە 35 هەزار دینار.

ژمارەی CD	0	2	4	6	8	10	12	14
تێچون	35	51	67	83	99	115	131	147

نەخشەیەك بنووسە ئەمە بنوێنێت.

بەرەنگاری

35 **تەکنەلۆژیا** بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکەی دوو ڕاهێنانی پێشو لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا. بەراوردی نێوان دوو خستنەڕووەکە بکە. کام یانەیان خستنەڕووی باشتر پێش کەش دەکات؟ ئەوە ڕوون بکەرەوە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

خشتەی بەهاکانی هەر نەخشەیەك پێکبهێنە بەلەجیاتیدانانی بەهاکانی

$1, 2, 3, 4, 5, 10$ لەجیاتی x و هێڵە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

36 $y=2x+1$ **37** $y=5x-1$

بەهزری بەهای ژمارەیی هەر برێك لەمانە هەژمێربکە.

38 $300-196$ **39** 10×30 **40** $\frac{480}{16}$ **41** $1\,000\times 1\,000$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

42 لەخشتەی سەرەوە بکۆڵەوە ئایا نەخشەی هێڵی دەنوێنێت؟

43 ڕێسای پەیوەندی نێوان x و y بنووسە، پێدراوەکانی خشتەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و لە وەڵامەکەی پێشووت ساغبکەوە.

وانەی 3

شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

Various forms of the equation of a line



ئامانجەکان

- شێوە جۆراوجۆرەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ دەناسێ.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەشێوە جیاوازەکانی دەنووسێت.

بۆچی

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك ڕۆڵێکی گرنگ لەبیرکاری دەگێڕێ، وە سادەترین نەخشەی جەبری دەنوێنێ و هەروەها بۆ بنیاتنانی نموونەی زۆربەی کێشەکانی ژیان بەکاردێت.

چالاکی 1

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری-یەکتربڕین Slope-Intercept Form

نەوزاد سەردانی کۆمپانیایەکی بەکرێدانی ئوتومبیلی کرد. فەرمانبەری کۆمپانیاکە پێی ڕاگەیاند دەبێ 100هەزار دینار بدات کاتێك ئوتومبێل وەردەگرێت و 1.5 هەزار دینار بدات بۆ هەر کیلۆمەترێك دەیبڕێت.

1. ئەم خشتەیەی دێت تەواوبکە.

ژمارەی کیلۆمەترەکان	10	20	30	
ئەوەی پێویستە بیدات	$1.5 \times 10 + 100$			

2. هاوکێشەی گۆڕمەی y کە پێویستە بیدات بەپێی ژمارەی کیلۆمەترەکانی x بنووسە.

3. ئەم هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

جێبەجێکردنەکان

بازرگانی

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەكتربڕین   Slope - Intercept Form

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەكتربڕین بریتییە لە $y = mx + b$ كاتێك m و b دوو ژمارەی ڕاستیین، ژمارەی m لاری ڕاستەهێڵەكەیە و b تانی خاڵی یەكتربڕینی ڕاستەهێڵەكەیە لەگەڵ تەوەرەی y .

نموونە 1

لاری ڕاستەهێڵ و خاڵی یەكتربڕین لەگەڵ تەوەری y دیاریكە.

أ $y = 3x - 4$ ب $y = -5x + 3$ ج $y = 5$

شیكار

أ لاری 3 و خاڵی یەكتربڕین $(0 ،-4)$

ب لاری -5 و خاڵی یەكتربڕین $(0 ،3)$ ج لاری 0 و خاڵی یەكتربڕینی $(0 ،5)$

هەوڵبدە ئەو ڕاستەهێڵە بكێشە كە ئەو هاوكێشەیە $y = 2x - 8$ دەنوێنێ.

چالاكی 2

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری–خاڵێك   Slope - Point Form

ئەگەر لاری ڕاستەهێڵ m و خاڵێك (h, k) كە پێیدا دەڕوات بزانیت، ئەوا دەتوانیت هاوكێشەكەی بنووسی.

1. هاوكێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی لاری و یەكتربڕین ئەوەیە $y=mx+b$ پەیوەندی نێوان لاری m وهاوكۆڵكەی x لەم پەیوەندییەدا چییە؟ چۆن هاوكێشەی ڕاستەهێڵ دەنووسیت بۆ دەربڕین لەم پەیوەندییە؟
2. هاوكێشەیkاستەهێڵێك بەخاڵی (h, k)دا دەڕوات بنووسە بەلەجیاتیدانانی بەهای h لەجیاتی x و بەهای لەجیاتی y .
3. هاوكێشەكە شیكاربكە و دەرئەنجامی بەهایb بەپێی m ، k ، h دەربخە.
4. لەجیاتی b بەهاكەی دابنێ، هاوكێشەی ڕاستەهێڵەكە بە شێوەی لاری – خاڵەكە بنووسە.

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری ـ خاڵێك   Slope - Point Form

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – خاڵێك بریتییە لە $y - y_1 = m(x - x_1)$ كاتێك

- m لاری ڕاستەهێڵەكەیە.
- (x_1, y_1) پۆوتانی خاڵەكەیە كە ڕاستەهێڵەكە پێیدا دەڕوات.

نموونە 2

هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لاریەكەی 2–و بەخاڵی (1- , 1) دا دەڕوات پاشان وێنەكەی بكێشە.

شیكار

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-1) &= -2(x - 1) \\ y + 1 &= -2x + 2 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$



هەوڵبدە هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە كە لاریەكەی (3)یە و بە خاڵی $(-2, -1)$ دا دەڕوات پاشان وێنەكەی بكێشە.

چالاکی 3

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەدوو خاڵدا بڕوات — **Two Points Form**

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بە دوو خاڵی $(5, 3)$ و $(7, 4)$ دا دەڕوات.

1. لاری ڕاستەهێڵەکە هەژمێربکە.
2. هاوکێشەکەی بنووسە بە شێوەی لاری – خاڵ. پاشان بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵدا دەڕوات — **Two Points Form**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بە دوو خاڵی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دا دەڕوات. دەبێتە

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

هەوڵبدە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵی $(5, 65)$ و $(7, 71)$ دا دەڕوات بنووسە بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

شێوەی گشتی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ — **Standard Form**

چالاکی 4

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی — **Standard Form**

جێبەجێکردنەکان
بۆ خۆشی

کارگێڕی باخچەی ئاژەڵان پلیتی چوونە ژوورەوە بە 10 هەزار دینار دیاریکردووە بۆ گەورەکان و بە 5 هەزار دینار بۆ منداڵان، دەستکەوتی ڕۆژی چوارشەممە گەیشتە 1 350 دینار.

خشتەیەکی بەها

x	y
50	
	120
	70
120	

1. x بەکاربهێنە بۆ نیشاندانی ژمارەی گەورەکان و y بۆ نیشاندانی ژمارەی بچووکەکان. دەستکەوتی ڕۆژی چوارشەممە 1 350 دینار بوو. ئەمە بە هاوکێشەیەك دەربڕە؟
2. خشتەکە تەواوبکە بۆ پێکهێنانی خشتەی جووتە ڕێکخراوەکان کە هاوکێشەکە ساغدەکەنەوە.
3. بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشە دەستکەوتوەکەت بنوێنە بە بەکارهێنانی جووتەڕێکخراوەکان. وێنە ڕوونکردنەوەییە کێشراوەکە چۆنە؟
4. دڵنیابە لە وەڵامەکەت لە تایبەتمەندی وێنە ڕوونکردنەوەکە لە ڕێگای شیکارکردنی هاوکێشەکە.

✓ **خاڵی چاودێری**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی — **Standard Form**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی ئەمەیە $ax + by + c = 0$ کاتێك

- a و b و c ژمارەی ڕاستین.
- یەك لە دوو ژمارەی a و b بەلایەنی کەمەوە یەکسان نییە بە 0.

نموونە 3

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەشێوەی گشتی بنووسە.

أ $y = -2x + 3$ ب $x = -13y + 4$ ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

شیکار

أ $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

ب $x = -13y + 4$

$x + 13y = 4$

ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$

$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

ئەم شێوەیە شێوەی گشتییە چونکە دەنووسرێ $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

نموونە 4

هەر هاوکێشەیەك بە شێوەی لاری–یەکتربڕین بنووسە.

أ $2y-2x=6$ ب $6x+4y=4$ ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

شیکار

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6x+3$$
$$y=8x+4$$

هەوڵبدە هاوکێشەی $y-23=5(x-4)$ بەشێوەی لاری–یەکتربڕین بنووسە پاشان بە شێوەی گشتی بنووسە.

هاوکێشەی دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیی و ستوونی Horizontal and Vertical Lines

هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئاسۆیی بریتییە لە $y=b$ کاتێك b یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەری y دەنوێنێت، لاری ڕاستەهێڵە ئاسۆییەکە هەردەم دەکاتە 0 .

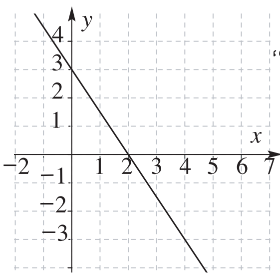
هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ستوونی بریتییە لە $x=b$ کاتێك b یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەری x دەنوێنێت، لاری ڕاستەهێڵی ستوونی پێناسەنەکراوە.

شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ Various Form of the Equation of a Line

ناوی شێوەکە	شێوەی هاوکێشەکە	نموونە
لاری – یەکتربڕین	$y=mx+b$	$y=3x+5$
گشتی	$ax+by=c$	$3x-2y=5$
لاری – خاڵ	$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-2=-3(x-1)$
بە دوو خاڵدا بڕوات	$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$	$y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا



1 هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لارییەکەی m وبەخاڵی بنەڕەتدا بڕوات،

2 چۆن ڕاستەهێڵی $y=mx+b$ دەگۆڕێت کاتێك بەهای b بگۆڕێت؟

3 چۆن ڕاستەهێڵی $y=mx$ دەگۆڕێت کاتێك بەهای m بگۆڕێت؟

4 چۆن شێوەی لاری – خاڵ بەکاردەهێنرێت بۆ نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە دوو خاڵی $(1, 1)$ ، $(-2, 4)$ دا بڕوات؟

5 ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی وێنەی بەرامبەر دەنووسیت.

6 چۆن هاوکێشەی $3x+3y+2=0$ دەنووسیت بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بەشێوەی گشتی بنووسە.

7 $y = 3x + 7$ **8** $2y = 3x - 4$ **9** $3x = -7y - 17$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە، ئەگەر لاری وئەو خاڵەی پێیدادەڕوات زانراوبێت.

	لاری	خاڵ
10	2	$(3,4)$
11	-2	$(-3, 4)$
12	$\frac{1}{3}$	$(3, -4)$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین و بەشێوەی گشتی بنووسە.

13 $y - 50 = 8(x - 4)$ **14** $3y = 9x + 15$ **15** $y = 10(-4x + 3)$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە ئەگەر دوو خاڵ زانرا کە پێیاندا دەڕوات.

16 $(-2, 5)$،$(5,-2)$ **17** $(-4, 4)$،$(-3, 3)$ **18** $(-3, -2)$،$(3, 2)$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ دوو تەوەری پۆتان دیاریبکە.

19 $y = 4x + 5$ **20** $y = 8x - 1$ **21** $y = -3x + 5$

22 $y = -2x + 13$ **23** $y = 17x - 4$ **24** $y = -5x - 9$

25 $y + x = 10$ **26** $3x - 2y = 12$ **27** $5x + 4y = 12$

28 $4x - 5y = 20$ **29** $2x - 7y = 14$ **30** $9x + y = 18$

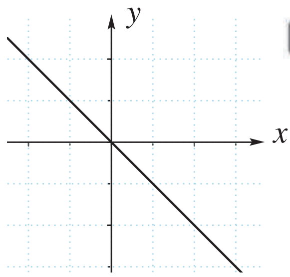
لاری ڕاستەهێڵەکە و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەرەی ستوونی دیاربکە، بەبێ کێشانی وێنەکەی.

31 $y = -5x$ **32** $y = -5x + 3$ **33** $y = 7$

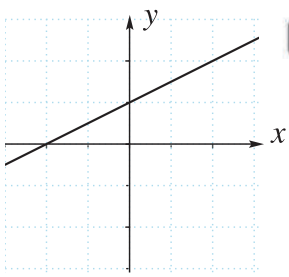
34 $x = 7$ **35** $y = 7 - x$ **36** $y = \frac{1}{3}x - 5$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەشێوەی لاری یەکتربڕینی بنووسە.

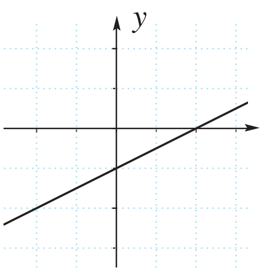
37



38



39



40 لاری ڕاستەهێڵێك چەندە کە هاوکێشەکە $6x + 2y = 40$ ؟

ناتوانرێ هاوکێشەی ڕاستەهێڵ $x = 4$ بنووسرێت لەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین چونکە لارییەکەی پێناسە نەکراوە، بەڵام دەتوانرێت بەشێوەی $4 = y \times 0 + x \times 1$ بنووسرێت، ئەم خشتەیە تەواوبکە.

	هاوکێشەی پێدراو	شێوەی لاری ـ یەکتربڕین	شێوەی گشتی
41	$x = 1$		
42	$y = 4$		
43	$x + y = 5$		
44	$y = 4x$		
45	$x = 4y$		

بەرەنگاری

46 وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $4x+2y=12$ و $2x+y=10$ بکێشە. چی تێبینی دەکەیت؟

جێبەجێکردن

47 **ژینگە** وا دابنێ کە بەرزی ئاو لە ڕووبارێك لە ڕووبارەکاندا 34 cm ە، و ئەو بەرزییە زیاددەکات بەتێکڕای 5cm ڕۆژانە. هاوکێشەیەك بنووسە بەرزی ئاوەکە وژمارەی ڕۆژەکان بنوێنێت ئەم هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، پاش چەندڕۆژ بەرزی ئاوەکە دەبێتە 260cm؟

بەرەنگاری

48 **پاشەکەوت** باوکی دانا بلیتی بەشداربوونی لە یانەیەکی وەرزشی بە بەهای 40 هەزار دینار بۆ کوڕەکەی کڕی. دانا بەپێی ئەم پلیتە هەر ڕۆژێك سەردانی یانەکە بکاتە 1 هەزار دینار دەدات لەجیاتی ئابونەی ئاسایی کە دەکاتە 3.5 هەزار دینار. چەند جار دانا دەتوانێت بڕوات بۆ یانەکە تاوەکو باوکی زەرەرمەند نەبێت لە کڕینی بلیتەکە؟

جێبەجێکردن

49 **بازرگانی** نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی ئاهەنگ 5 هەزار دینار بۆ گەوران و3 هەزار دینار بۆ بچووکەکان بوو، هاوکێشەیەك بنووسە دەستکەوتی ئاهەنگێك کە گەیشتە 700هەزار دینار دیاری بکات بە بەکارهێنانی x بۆ ژمارەی گەوران وy بۆ ژمارەی بچووکان، لاری ئەو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشەیە دەینوێنێت چەندە؟ و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری y چەندە؟

تـێڕوانینێك بۆدواوە

50 ڕێسای $d = vt$ دووری بەمەتر کە ئۆتۆمبیلێك دەیبڕێت، کە بە خێرایی v مەتر لە چرکەیەکدا لەماوەی t چرکە دەردەبڕێت، ئەو ڕێسایە بەکاربێنە بۆهەژمارکردنی ئەو دووریەی ئوتومبیلەکە لە 4 چرکە دەیبڕێت، ئەگەر زانیت بەخێرایی 50 مەتر لە چرکەیەکدا دەڕوات.

51 ڕێسای هەژمارکردنی چێوەی بازنەی P بەپێی نیوەتیرەکەی r بنووسە. لەپاشان ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە بۆ هەژماردکردنی چێوەی بازنەیەك نیوەتیرەکەی 8cm بێت ژمارە 3.14 بەکاربێنە وەك بەهای نزیکراو بۆ ژمارە π .

خشتەکە بوونسەوە، پاشان تەواویبکە، کەرتەکان بە سادەترین شێوە بنووسە.

جێبەجێکردن

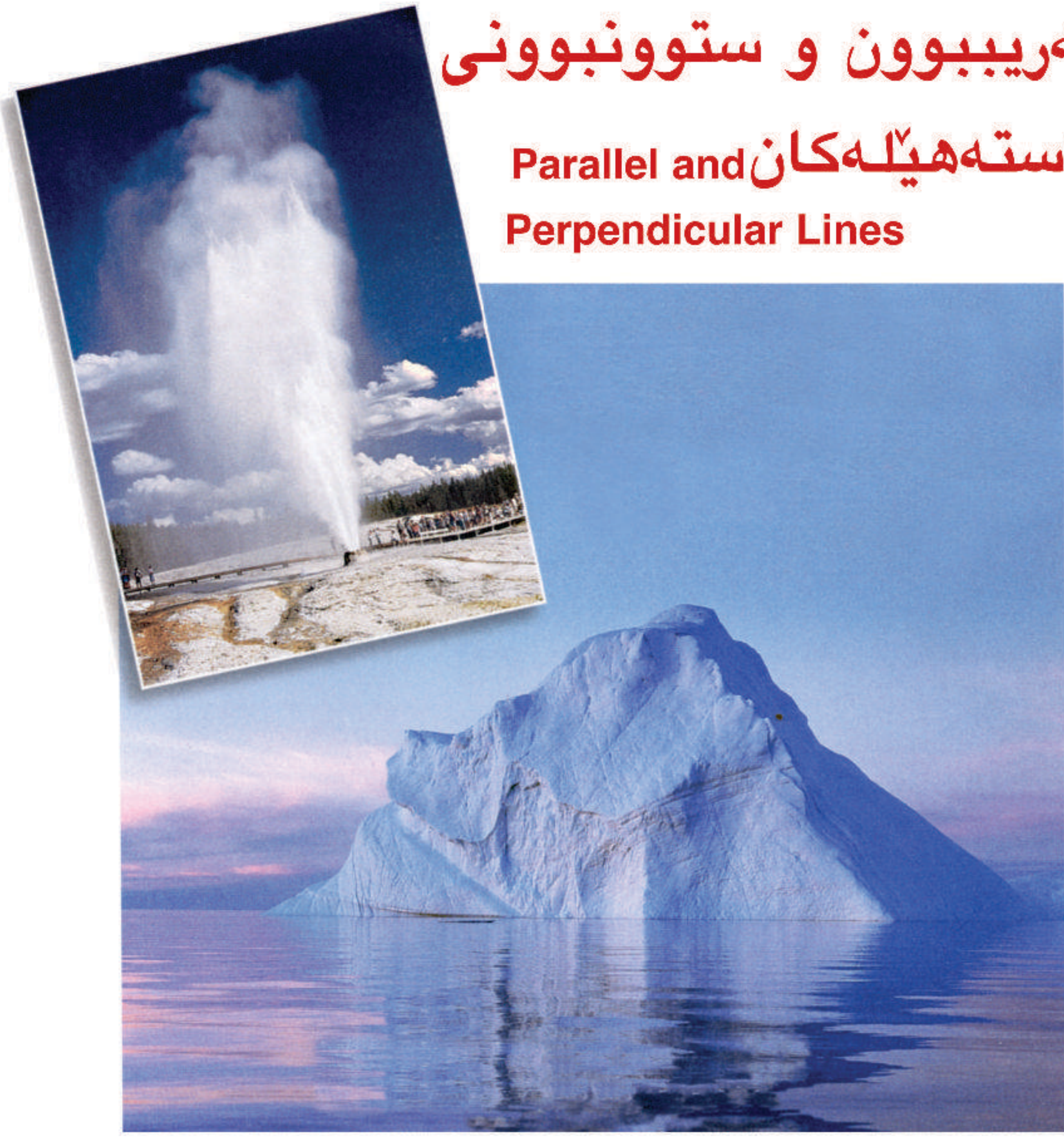
	شێوەی کەرتی	شێوەی دەیی	ژمارەکە وەك ڕێژەی سەدی
52		$0.\overline{3}$	$33\frac{1}{3}\%$
53		0.875	
54			2%
55	$\frac{1}{20}$		
56			$12\frac{1}{2}\%$
57	$\frac{2}{3}$		
58	$\frac{1}{6}$		
59			0.01%
60		0.80	
61	$\frac{2}{5}$		

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

62 لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دوو ڕاستەهێڵی $y = 2.12x - 3.7$ و $y = x + 5.4$ بکێشە پۆتانی هەموو خاڵە یەکتربڕینەکانی نێوانیان دیاریبکە.

وانەی 4

تەریببوون و ستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان
Parallel and Perpendicular Lines



ئامانجەکان

- تەریببوونی دوو ڕاستەهێڵ یان ستونبوونیان بە بەراوردکردنی لاریەکانیان جیادەکاتەوە.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕاستەهێڵێکی تر یان ستوون لەگەڵیدا دەنووسێت.

بۆچی

دوای ناسینی ڕاستەهێڵە تەریبەکان یان ستوونەکان لەڕێگەی بەراوردکردنی لارییەکانیان بە هەنگاوێکی گرنگ دادەنرێت بۆ جیاکردنەوەی پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵەکان بەبێ ئەوەی وێنەکانیان بکێشین.

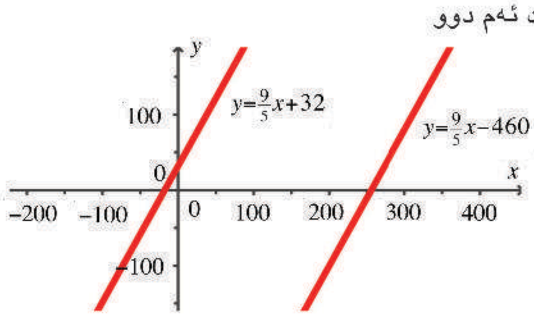
جێبەجێکردنەکان

فیزیا

ئاو بەشێوەی جۆراوجۆرەکانی دەردەکەوێت بەپێی پلەکانی گەرمی، دەبیەستێ لەپلەکانی گەرمی زۆر نزم وەك لە چیای بەفری وێنەکەدا دیارە، یان دەگۆڕێت بۆ هەڵم لەپلەی گەرمی بەرز وەك دیارە لەم هەڵمەی لەزەوی بەرز دەبێتەوە.

خشتەی بەرامبەر پلەکانی گەرمی بەسێ پێوەر دیاردەکات، پێوەری فهرنهایت و پێوەری سەدی و پێوەری کالڤن. گۆڕینی پلەی گەرمی لە پێوانی سەدی بۆ پێوانی فهرنهایت بەپێی یاسای $F=\frac{9}{5}C+32$ دەبێت و پێوانی کالڤن بۆ پێوانی فهرنهایت بەپێی یاسای $F=\frac{9}{5}K-459.4$ دەبێت دەتوانرێت ئەم دوو هاوکێشەیە بەلەجیاتیدانانی y لەبری هەر F و x لەبری c یان K. بڕوانە ئەو دوو $y=\frac{9}{5}x+32$ و $y=\frac{9}{5}x-460$ ڕاستەهێڵەی دوو هاوکێشەکە دەنوێنن تەریبن و لارییان یەکسانە.

	فهرنهایت	سەدی	کالڤن
کولانی ئاو	212	100	373
بەستنی ئاو	32	0	273
سفری ڕووت	-459	−273	0



Parallel Lines راستەهێڵە تەریبەکان

ئەگەر لاری دوو ڕاستەهێڵ یەکسان بوون ئەوا تەریب دەبن.

ئەگەر دوو ڕاستەهێڵی نا ستوون تەریب بوون ئەوا لارییەکانیان یەکسان دەبن (ئەستوونی سەر تەوەری سینی نەبن).

نموونە 1

به شێوەی لاری ـ یەکتربرین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = 3x - 7$ و تەوەری ستوونی لە 4 دا ببڕێت بنووسە.

شیکار

لاری ئەو ڕاستەهێڵە دەکاتە 3 و لەبەرئەوەی تەوەری y لە 4 دا دەبڕێت، ئەوا هاوکێشەکەی دەبێتە $y = 3x + 4$.

هەوڵبدە بە شێوەی لاری ـ یەکتربرین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = 0.5x + 5$ و تەوەری ستوونی لە -2 دادەبڕێت بنووسە.

لە بیرت بێت دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون دەبن ئەگەر یەکتریان بڕی و گۆشە وەستاویان پێکهێنا. لەم چالاکیەی دێت پەیوەندی نێوان لارییەکانی دوو ڕاستەهێڵی ستوون دەدۆزیتەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی پەیوەندی نێوان ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان و لاریەکانیان

Relation between Slope and Perpendicular Line

لەم چالاکییەدا پێویستمان بە ڕاستەی وەستاو و کاغەزی ڕوونکردنەوەیی هەیە کە دوو تەوەری ڕووتەختی پۆتانی لەسەر بێت.

1. ئایا دوو ڕاستەهێڵی $y = -2x + 3$ و $y = 0.5x - 2$ یەکتردەبڕن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
2. ئەو دوو ڕاستەهێڵە لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە بە ڕوونکردنەوەیی، پۆتانی خاڵی یەکتربڕینیان دیاریکە.
3. بەڕای تۆ پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵەکە چیە؟ ڕاستەی وەستاو بەکاربێنە بۆ ساغکردنەوەی وەڵامەکەت.
4. لاری ڕاستەهێڵی یەکەم و لەلاری ڕاستەهێڵی دووەم لێکبدە و ئەنجامی لێکدانەکە چییە؟

Perpendicular Lines ڕاستەهێڵە ئەستوونەکان

ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لاری دوو ڕاستەهێڵ بکاتە -1 ئەوا ستوون دەبن.

ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لاریەکانیان دەکاتە -1 .

نموونە 2

بنووسە، بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری ستوونی دەبڕێت لە 4 دا و ستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $y = 3x + 2$.

شیکار

لاری ڕاستەهێڵەکە دەکاتە $-\frac{1}{3}$ چونکە ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = 3x + 2$ کە لارییەکەی دەکاتە 3 هاوکێشە داواکراوەکە ئەمەیە $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

هەوڵبدە بە شێوەی لاری ـ یەکتربرین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری ستوونی دەبڕێت لە 6 دا ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = 4x + 2$ بنووسە.

نموونە 3 بە شێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی $(4, 5)$دا دەڕوات و ستوونە بە ڕاستەهێڵی $2x+3y=7$ بنووسە.

شیکار

دەستبکە بە نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵە دراوەکە بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ دەبێت لاری ڕاستەهێڵە ستوونەکە بکاتە $\frac{3}{2}$. و لەبەرئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەشێوەی لاری ـ خاڵ بریتییە لە: $y-y_1=m(x-x_1)$ ئەوا هاوکێشەی داواکراوەکە دەبێتە $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$

هەوڵبدە بنووسە، لەشێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی $(3, -2)$ دەڕوات، و ستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $4x-2y=-6$.

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. ڕوونبکەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك تەریب بە ڕاستەهێڵی $y=4x+3$ دەنووسی؟
2. ڕاستەهێڵێك لاریەکەی $\frac{2}{3}$ ڕوونیبکەوە چۆن لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵی دەدۆزیەوە؟
3. چۆن لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=\frac{1}{3}x+2$ دیاردەکەیت؟
4. ڕوونیبکەرەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك ستوون بێ لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=4x+3$ دەدۆزیەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بنووسە، بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ستوونی ببڕێت لە 5 دا و تەریب بەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

5. $y=2x+3$ 6. $y=-3x$ 7. $4y=x$ 8. $y=-6x+2$

بنووسە، بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ستوونی ببڕێت لە 5دا و ستوون بێ لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

9. $y=3x-3$ 10. $y=-3x$ 11. $5y=x$ 12. $-6y=x$

بنووسە، بەشێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی $(4, 5)$ بڕوات و ستوون لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

13. $2x+3y=4$ 14. $x-3y=8$ 15. $-2x-8y=16$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لاری هەریەك لەم ڕاستەهێڵانە دیاربکە.

16. $y=4x+10$ 17. $3x+y=7$ 18. $10=-5x+2y$
19. $4x-3y=12$ 20. $y=\frac{1}{3}x-3$ 21. $3x-y=7$

22 $2x-y=14$ 23 $3x+2y=51$ 24 $13=20x-5y$

25 $3y=-4x+2$ 26 $\frac{2}{3}x+6y=1$ 27 $4x+\frac{1}{4}y=8$

لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵ ئەم ڕاستەهێڵانە دیاری بکە.

28 $y=-\frac{1}{3}x+10$ 29 $-\frac{1}{2}x-y=20$ 30 $13=-x+y$

31 $3x+12y=12$ 32 $y=5x+10$ 33 $3x+y=2$

34 $20=-5x+2y$ 35 $4x+4y=12$ 36 $2y=5x+11$

37 $-4x+8y=17$ 38 $12x+3y=10$ 39 $4y=20x-3$

بنووسە، بەشێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی (2،3) دەڕوات و تەریب بەو ڕاستەهێڵەی دراوە.

40 $x+y=1$ 41 $3x=7y+2$ 42 $y=2x-3$

43 $3y=2x$ 44 $7x-2y=10$ 45 $11=3y+2x$

بنووسە، بەشێوەی لاری – یەکتربڕین، هاوکێشەیەك بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم پێدراوانە دیاریکراوە.

	بڕوات بە	تەریب بە ڕاستەهێڵی
46	(3, –5)	$5x-2y=10$
47	(–2, 7)	$y=3x-4$
48	(2, 4)	$y=7$
49	(2, –4)	$y=3x-4$
50	(–1, 4)	$y=2x+5$

	بڕوات بە	ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی
51	(3, –5)	$5x+2y=10$
52	(2, 7)	$y=3x-4$
53	(2, –4)	$y=7$
54	(–2, 4)	$3x+y=5$
55	(–1, 4)	$y=2x-5$

وێنەی ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە.

56 ڕاستەهێڵێك تەریب بە ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە و هاوکێشەکەی بنووسە.

57 ڕاستەهێڵێك ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە هاوکێشەکەی بنووسە.

چی دەتوانیت بڵێیت دەربارەی لاری هەر یەکە لەم ڕاستە هێڵانەی خوارەوە؟

58 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی 59 ستوون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی

60 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی شاوڵی 61 ستوون بیت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی شاوڵی

بەستنەوە

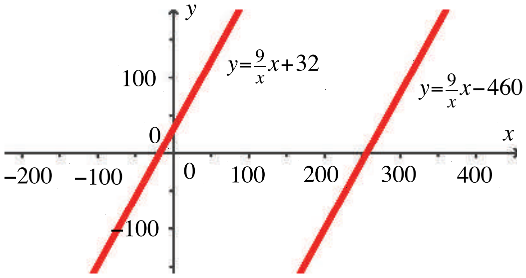
ئەندازە هاوکێشەکانی چوار ڕاستەهێڵ بنووسە کە یەکتریان بڕیبێت بۆ ئەوەی لاکانی چوارگۆشەیەك دروستبکەن.

62 تەریب بن بە دوو تەوەری پۆتان 63 تەریب نەبن بە دوو تەوەری پۆتان

جێبەجێکردن

64 **ئەندازە** یەکێك لە لایەکانی چوارگۆشەیەك دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y=\frac{3}{4}x+5$ هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکان کە دەشێت بکەونە سەر لاکانی تری چوارگۆشەکە بنووسە.

65 **فیزیا** یاسایەك بنووسە بۆ گۆڕینی پلەکانی گەرمی لە پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی سەدی، یاسایەکی تر بۆ گۆڕینی پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی کالڤن، ئەو دوو یاسایە لەشێوەی هاوکێشە بنووسە، بە بەکارهێنانی x بۆ پلەکانی گەرمی بە پێوانەی فەرنهایت و y بۆ پلەکانی گەرمی لە پێوانەی کالڤن یان پێوانەی سەدی. دوو ڕاستەهێڵەکە بکێشە.



هاوکێشەی $y=\frac{9}{5}x+32$ گۆڕین لە پێوانەی سەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت دەکات و هاوکێشەی $y=\frac{9}{5}x-460$ بۆ گۆڕینی لەپێوانەی کالڤن بۆ پێوانە فەرنهایتی دەکات.

66 پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵی ڕاهێنانی 65 چییە؟ لاری هەریەکەیان بنووسە.

بەرەنگاری

67 پەیوەندی نێوان ئەو دوو ڕاستەهێڵە ڕاهێنانی 66 و ئەو دوو ڕاستەهێڵەی کە گۆڕینی پێوانەی کالڤن و سەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت دەنوێنن چییە؟

ڕوانین بۆ دواوە

68 کەوانەکان لە شوێنی پێویست دابنێ بۆ ئەوەی یەکسان بوونەکە ڕاست بێت.

$$2\times7+35\div7-10=2$$

ئەمانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

69 $2x^2+3y+4y+3x^2$

70 $3x+2+4y-2+3y$

71 $2x+3xy+5x^2-7xy$

72 $3x+4y+2x+5-6y$

73 $4x^2+5x+8+11x^2+3x$

74 $3xy+2x+4y-xy$

75 $9x^2+5xy+2x-4x^2$

76 $4y^2-12y+6xy+3y$

ڕوانین بۆ پێشەوە

چەند جووتە ڕێکخراو شیکاریك بۆ سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بە دوو گۆڕاو پێکدێنێت ئەگەر ئەو دوو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشەیە دەنوێنن.

77 تەریب بن؟

78 ستوون بن؟

وانەی 5

شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی

Solving Linear Systems Graphically

ئامانجەکان

- سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی شیکاردەکات بە ڕوونکردنەوەیی.
- سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی پۆلێندەکات.

بۆچی

سستەمی هاوکێشەکانی هێڵی بۆ شیکارکردنی ڕووداوەکانی ژیانی ڕۆژانە زۆربەی جار بەکاردێت بەتایبەتی لەکارگێڕی و ئابووری، لەهەندێ باردا، دۆزینەوەی شیکاری تەواو زۆرگرنگ نییە بەڵام پێویستە شیکارێکی نزیکی بدۆزیتەوە و لەهەندێ باردا داواکراو ئەوەیە ئەگەر شیکاری هەبێت تەنها یەك شیکار یان زۆرتر لە شیکارێك، لەم بارانەدا شیکاری ڕوونکردنەوەی بۆ سستەمی هاوکێشەکانی هێڵی یارمەتیمان دەدات بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکراوەکە.



شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بەڕوونکردنەوەیی
Solving Linear Systems Graphically

لەبەشی پێشوو چۆنیەتی شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵیەکان فێربوویت بە بەکارهێنانی لەجیاتیدانان یان لابردن، لە هەریەکە لەم دوو ڕێگایە پێویستە بەهای یەکێك لە دوو نەزانراوەکە دیاریبکەین پاشان بەهای ئەویتریان دیاریبکەین. لە بارێکی تر، شیکاری پرسیارێکی ژیانی ڕۆژانە لەوانەیە تەنها پێویستی بە دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی شیکارەکەیە، و لەوانەیە پێویست بە وەڵامدانەوەی پرسیارێکی سادە بێت وەك ئایا شیکاری سستەمی هاوکێشەکان هەیە؟ و ژمارەیان چەندە ئەگەر هەبن؟ لەم وانەیە ڕێگای شیکارکردنی ئەو سستەمانە فێردەبیت و وەڵامی خێرا بۆ ئەم پرسیارانە مسۆگەردەکەیت.

چالاکی 1

شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی Solving Linear Systems Graphically

پێویستمان بە بزمێری ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوەی هەیە.

شیکاری ڕوونکردنەوەی سستەمی $\begin{cases} y = 3x+1 \\ y = -x+5 \end{cases}$ دەکەین.

1. چی دەڵێیت دەربارەی خاڵی (c, d) بەپێی دوو ڕاستەهێڵی $y = 3x+1$ و $y = -x+5$ کاتێك جووتەڕێکخراوی (c, d) شیکارێکی ئەو سستەمە دەبێت؟
2. هەردوو ڕاستەهێڵەکە لەهەمان ڕووتەختی پۆتان بکێشە.
3. بەهای نزیکەیی بۆ پۆتانی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە.
4. شیکارێکی نزیکەیی سستەمەکە بدۆزەرەوە.

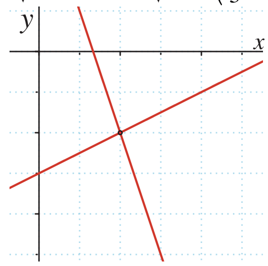
خاڵ چاودێری ✔

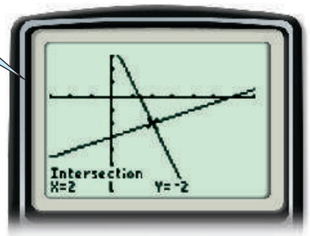
نموونە 1

بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases}3x+y=4\\x-2y=6\end{cases}$ شیکاربکە.

شیکار

بۆ کێشانی ڕاستەهێڵی $3x+y=4$ ، خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی y دیاربکە لەڕێگای دانانی سفر لەجیاتی گۆڕاوی x ودۆزینەوەی بەهای گۆڕاوی y کە بەهایە بەرامبەرەکەیەتی $y=4$ دەستدەکەوێت، کەواتە ڕاستەهێڵەکە بە خاڵی $(0,4)$ دا دەڕوات، دیسان خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی x دیاربکە بەدانانی بەهای سفر لەجیاتی گۆڕاوی y و دۆزینەوەی بەهای x ی بەرامبەری $x=\frac{4}{3}$، دەستدەکەوێت کەواتە ڕاستەهێڵەکە بەخاڵی $\left(\frac{4}{3},0\right)$ دادەڕوات، ئێستا ڕاستەهێڵەکە بکێشە.





شاشەکە وەک ئەمەی خوارەوە پێناساکراوە $-3;\ 7$ ئاسۆیی و $-7;\ 3$ ستوونی بۆ ئەوەی وێنەی بەرامبەر دەست بکەوێ.

ڕێگای پێشوو بەکاربێنە بۆ کێشانی ڕاستەهێڵی دووە $x-2y=6$ ڕاستەهێڵەکە یەکتردەبڕن لە خاڵی $(2,-2)$.
شیکارەکە $(2,-2)$.

پاسدانی شیکارەکە بەلەجیاتیدانانی ژمارە 2 لەبری x و ژمارە -2 لەبری y.

$3x+y\overset{?}{=}4$ $\qquad$ $x-2y\overset{?}{=}6$

$3\times 2+(-2)\overset{?}{=}4$ $\qquad$ $2-2(-2)\overset{?}{=}6$

$6-2\overset{?}{=}4$ ڕاستە $\qquad$ $2+4\overset{?}{=}6$ ڕاستە

چالاکی 2

پۆلێنکردنی سستەمەکانی هاوکێشە هێڵیەکان Classifying Linear Systems

پێویستە بە بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەو هەیە.

$\begin{cases}y=2x-1\\y=-x+5\end{cases}$
$\begin{cases}y=2x-1\\y=2x+1\end{cases}$
$\begin{cases}y=\frac{8-3x}{4}\\y=-\frac{3}{4}x+2\end{cases}$

1. بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی یەکەم بنوێنە لە خشتەی بەرامبەر.

A. ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتردەبڕن؟

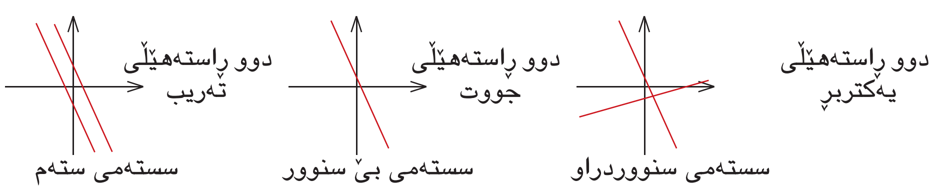
B. ئایا سستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەیە؟ ئەو شیکارە چییە ئەگەر هەیە؟ وئەگەر سستەمەکە شیکاری نییە، سستەمەکە بگۆڕە بۆ ئەوەی تەنها یەك شیکارت دەستکەوێ و هەژمێرییبکە.

2. ئەوەی پێی هەڵساوی ڕوونیبکەوە بە بەکارهێنانی سیستمی دووەم لەپاشان سێیەم.

3. پەیوەندی نێوان ئەو دوو ڕاستەهێڵەکە ڕوونبکەوە. **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

- کاتێك سستەمەکە شیکاری نەبێت.
- کاتێك سستەمەکە ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەبێت.
- کاتێك سستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەبێت.

کاتێك هەوڵ دەدەیت بە ڕوونکردنەوەیی سیستمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی شیکاربکەیت، یەکێك لەو سێ بارانەی خوارەوە دەبێت.



پۆلێنی سستەمەکانی هاوکێشەی هێڵی Classifying Linear Systems

سستەمەکانی هاوکێشەی هێڵی پۆلێن دەکرێن بۆ سێ جۆری بنەڕەت:

- سستەمی ستەم **Inconsistent** : سیستمێکە شیکاری نییە.
- سستەمی سنووردراو **Independent** : سیستمێکە تەنها یەك شیکاری هەیە.
- سستەمی بێ سنوور **Dependent**: سیستمێکە ژمارەیەکی بێ سنوور شیکاری هەیە.

نموونە 2

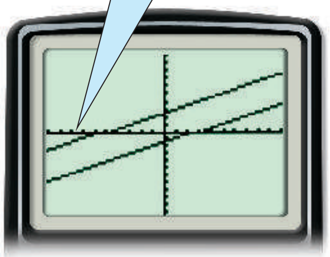
هەریەکە لەم سستەمانە پۆلێن بکە و شیکارەکەی دیاربکە ئەگەر هەبێت.

أ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-5y=-7 \end{cases}$ ب $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+5=2y \end{cases}$

شیکار



لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتر دەبڕن ئەوا سستەمێکی دیاریکراوە شیکارەکەش (3, 2) .



لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن ئەوا سستەمکە ئەستەمە.

هەوڵبدە سستەمی $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ پۆلین بکە و شیکارەکەی دیاربکە ئەگەر هەبێت .

سەرنجێکی ڕەخنەگرانە سستەمی $\begin{cases} y=mx \\ y=nx \end{cases}$ پۆلین بکە کاتێك m ، n جیاواز بن لە سفر . لە هەموو بارەکانی لەتواناداية بكۆڵەرەوە.

نموونە 3

جێبەجێکردنەکان
زانستە کۆمەڵایەتیەکان

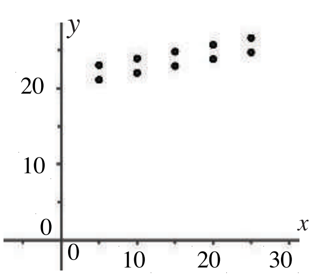


ئامارەکان دەربارەی تەمەنی هاوسەرگیری بۆ نێرینە و مێینە لە یەکێك لە وڵاتان دەرکەوتووە وەك پێدراوەکان لە وێنەی بەرامبەردا دیاریکراوە. خشتەیەك پێکبهێنە ئەو پێدراوانە پوختکاتەوە. ئایا کاتێك دێت تەمەنی هاوسەرگیری لای نێرینەکان و مێینەکان یەکسان بن ئەگەر کارەکە هەر بەم شێوەیە بڕوات؟

شیکار

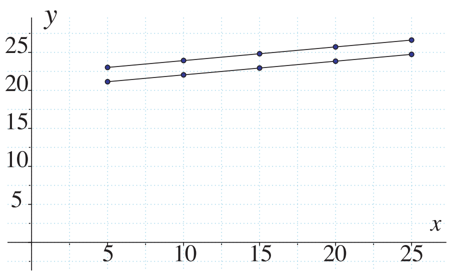
بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە،پێدراوە تایبەتییەکانی هەردوو ڕەگەز لە هەمان تەوەری پۆتان بنوێنە.

پاش ساڵی 1970	تەمەنی هاوسەرگیری پیاوان	تەمەنی هاوسەرگیری ژنان
5	23.02	21.14
10	23.92	22.04
15	24.82	22.94
20	25.72	23.84
25	26.62	24.74



بڕوانە خاڵەکانی پەیوەست بە هەردوو ڕەگەزەکە دەکەونە سەر هەمان ڕاستەهێڵ. لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە نێرینەکان دەکاتە $m_1 = \frac{24.82-23.02}{15-5} = -0.18$ و هەروەها لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە مێینەکان دەکاتە $m_2 = \frac{22.94-21.14}{15-5} = 0.18$. بۆ ئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی پەیوەست بە نێرینەکان بنووسێت $y = 0.18x + b$ بەبەکارهێنانی خاڵی $(10, 23.92)$ بەهای b دیاربکە واتە، $23.92 = 0.18x + b$ دەستدەکەوێت و هەروەها $b = 23.92 - 1.8 = 22.12$.
و هاوکێشەی پەیوەست بە نێرینەکان دەبێتە $y = 0.18x + 22.12$. دەتوانیت هاوکێشەی ڕاستەهێڵی پەیوەست بە مێینەکان بە هەمان ڕێگا بدۆزیتەوە $y = 0.18x + 20.24$.
تەمەنی هاوسەرگیری لای نێرینەکان لەگەڵ تەمەنی هاوسەرگیری لای مێینەکان یەکسان دەبێت ئەگەر سستەمی هاوکێشەکانی دێت شیکاری هەبێت.

$$\begin{cases} y = 0.18x + 22.12 \\ y = 0.18x + 20.24 \end{cases}$$



بۆ ئەوەی وەڵام بدۆزیتەوە سستەمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. نواندنی ئەم دوو هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی دوو ڕاستەهێڵی تەریب و ئەگەر کار بە هەمان شێوە بڕوات ئەوا یەکسان بوونی سستەمەکە کە دەکاتە یەکسانبوونی تەمەنی هاوسەرگیری لای دوو ڕەگەزەکە بێ هیوایە.

هەوڵبدە سستەمی $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 18x - 2y = 4 \end{cases}$ شیکاربکە بەڕێگەی لەجیاتیدانان پاشان شیکارەکە پاسادانبکە.

ڕاهێـــــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونبکەرەوە چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ شیکاردەکەیت؟

2 چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ دەنوێنیت؟ ڕوونبکەرەوە چۆن شیکارەکە دەخەملێنی بە سەیرکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی. بۆچی پێویستە ڕاستی خەملاندنەکەت ساغبکەیتەوە.

3 ڕوونبکەوە چۆن ڕێسای نەخشەی هێڵی دەدۆزێتەوە بە زانینی وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

هەریەك لەو سیستمانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

4 $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$

5 $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y = -x - 9 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

هەر سستەمێك بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و شیکارەکە بخەملێنە. خەملاندنەکە نزیکبکەرەوە بۆ نزیکترین دە.

7 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$

9 لانە 4000 دیناری پێیە لە پارچەکانی 250 دینار و 500 دیناری ژمارەی هەریەك لە پارچەکان لەهەر چەشنێك چەندە، ئەگەر ژمارەی هەموو پارچەکان 13 پارچە بێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەر سستەمێك پۆلێن بکە.

10 $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 4y-12=-3x \end{cases}$

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەو سستەمانە بنوێنە و پۆلێنیان بکە. شیکارەکە بە ڕوونکردنەوەیی دیاربکە کاتێك سیستەمەکە سنوورداربێت.

12 $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+4y=-10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} y=2x-1 \\ 6x-y=13 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x+3y=13 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

16 $\begin{cases} y=-2x-7 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

18 $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ \frac{1}{2}x=y+\frac{3}{2} \end{cases}$

20 $\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ 3x-6y=24 \end{cases}$

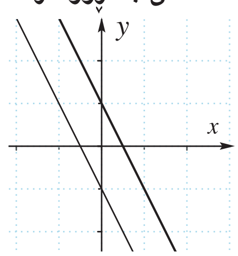
21 $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$

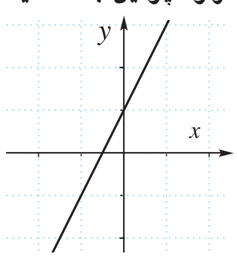
23 $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 3x+7y=47 \end{cases}$

ئەو سستەمەی بە ڕوونکردنەوەیی نوێنراوە پۆلێن بکە، شیکارەکە بنووسە ئەگەر تاکانە بوو.

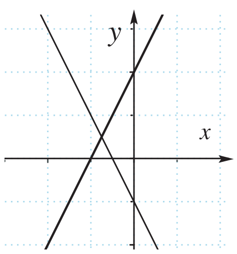
24



25



26



27 ئایا ئەم جووتە ڕێکخراوانە شیکاری سستەمەکە پێکدێنێ؟

أ $(1, 3)$؛ $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ x-y=11 \end{cases}$

ب $(5, -2)$؛ $\begin{cases} 4x-3y=26 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

ج $(2, 1)$؛ $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+3y=5 \end{cases}$

د $(5, 2)$؛ $\begin{cases} 4x-2y=16 \\ -8x+4y=-32 \end{cases}$

هـ یەك لەو چوار سستەمەی پێشوو سنووردراو نیە، بیدۆزەرەوە، پاشان سێ جووتە ڕێکخراوی تر بنووسە هەریەکەیان شیکارێك بێت بۆی

هەر سستەمێك بە ڕوونكردنەوەیی بنوێنە و پۆلێنی بكە. شیكاری سستەمەكە بدۆزەوە بۆ نزیكترین بەش لەسەد ئەگەر پێویستبوو.

28 $\begin{cases} y = 5x + 2.72 \\ y = 3.6x + 3.126 \end{cases}$

29 $\begin{cases} y = 4.3x - 0.44 \\ y = -2x + 4.6 \end{cases}$

30 $\begin{cases} -\frac{2}{5}x + y = -\frac{1}{10} \\ 3y - 2x = -\frac{5}{6} \end{cases}$

31 $\begin{cases} \frac{1}{7} = \frac{1}{14}x + \frac{11}{2}y \\ y = 4x + 14 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 0.7y = 0.8x + 0.78 \\ -\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 2.1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} 0.001y + \frac{4}{5}x = 0.2014 \\ 0.8x - 0.02y = 0.172 \end{cases}$

ئەندازە باخێكی لاكێشەیی چێوەكەی **130m**. سێ ئەوەندەی درێژیەكەی دەكاتە دە ئەوەندەی پانییەكەی.

34 درێژی و پانی باخەكە هەژمێربكە.

35 ڕووبەرەكەی هەژمێربكە.

36 **تاقیگەكان** كارمەندێكی تاقیگە دووگیراوەی تێكەڵكرد سوێری یەكەمیان10%وسوێری دووەمیان4%برەی هەریەك لەگیراوەكان چەندە بۆئەوەی گیراوە دەستكەوتووەكە 500mg بێت وسوێریەكەی 6% بێت.

37 **فڕۆكەوانی** فڕۆكەیەك لەبەرزی 7000m نزمبۆوە بەتێكرای 450m لەخولەكێكدا. فڕۆكەیەكی تر لەبەرزی 375m بەرزدەبێتەوە بەتێكرای 575m لە خولەكێكدا. سیستەمێك لەدوو هاوكێشەی هێڵی بنووسە ڕێگابدات بە هەژمێركردنی ژمارەی خولەكەكان پێش ئەوەی هەردوو فڕۆكەكە لەهەمان بەرزی دابن سستەمەكە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەو برانە سادەبكە.

38 $-4x + 2x$

39 $3y + (-2x) - 3y$

40 $x - y + x$

41 $5b^0$

42 $36^{\frac{1}{2}}$

43 $25^{\frac{1}{2}}$

44 $9^{\frac{3}{2}}$

45 $\left(\frac{2x^3}{x^{-2}}\right)^2$

46 $\left(\frac{y^{-1}n^2}{n^{-3}}\right)^{-3}$

47 $\left(\frac{2q^3b^{-2}}{-q^2b^{-3}}\right)^{-1}$

48 $3(5 - 2x) - (8 - 6x) = -9 + 2(3x + 4) - 10$ شیكاربكە.

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

49 ئەو سستەمەی دێت كە یەكێكیان هاوكێشەی هێڵیە و ئەوی تریان هێڵی نیە شیكاربكە بە ڕوونكردنەوەیی.

$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 4x \end{cases}$

وانەی

6

نەخشەی بەهای ڕووت Absolute Value Function

ئامانجەکان

- بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی دەناسێت و هەژمارەدەکات.
- نەخشەی بەهای ڕووت دەناسێت و دانەکانی دیاریدەکات.
- نەخشەی بەهای ڕووت بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت.

بۆچی

ئەو پێوەرانەی پێی هەڵدەستین کە ڕێژەیەکی گونجاوی هەڵەی تێدایە بە بەکارهێنانی نرخی ڕووت دەری دەبرین ئەمەش لەزۆر بواری ڕووداوی وەک پیشەسازی.

جێبەجێکردنەکان

ئامار



چالاکی 1

کارکردن بە نەخشەی ڕووت Exploring Absolute

قوتابیانی پۆلی دە هەڵسان بە چالاکییەك، کە ئامانجەکەیپێوانی ئەو هەڵەیە، کە مرۆڤ تێیدەکەوێت، کاتێك مەزندەی تێپەربوونی کاتی یەك خولەك دەکات. خوێندکاران بەش بوونە چەند کۆمەڵێکی دوو دوو، یەکێکیان هەردوو چاوی هاورێکەی بەست و داوای لێکرد دەستی بەرزکاتەوە پاشان نزمی بکاتەوە، پاش ئەوەی کە وابزانی کە یەك خولەك تێپەربووە، خوێندکاری یەکەم ئامێری پێوانەی کاتی بەکارهێنا بۆ پێوانی کاتی نێوان بەرزکردن ودابەزینی دەستی خوێندکاری دووەم، و ئەوەی دەستی کەوت تۆماری کرد، پاش ئەوە دوو خوێندکارەکە ڕۆڵیان گۆڕیەوە. خشتەی بەرامبەر ئەنجامەکانی ئەو چالاکییە پیشان دەدات.

1. ئەو هەڵەیەی هەر خوێندکارێك تێیدەکەوێت هەژماربکە بەلێدەرکردنی 60 لەژمارەی چرکەکان مەزندەکراوە کە لەیەك خولەك و ئەوەش لەستوونی سێیەم تۆماربکە. ئەگەر ئەو جیاوازییە سالب بوو، ئەوە دەگەیێنێت کە خەمڵاندنی خوێندکارەکە کەمتربووە لە خولەکێکی تەواو، بەڵام ئەگەر جیاوازییەکە موجەب بوو ئەوە دەگەیەنێت مەزندەی خوێندکارەکە پتربووە لە خولەکێکی ڕاستی.

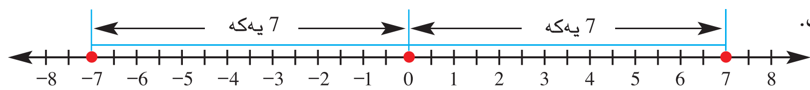
خوێندکار	کاتی مەزندەکراو بە خولەك	هەڵە	هەڵەی ڕووت
لاڤین	49		
داليا	59		
دوين	51		
كلارا	65		
نەردين	68		
دەوەن	77		
نارين	66		
يارا	54		
ئالان	67		
نوزاد	46		
پەيوەند	62		
تارا	61		
سارا	53		
شارا	64		

زاناکان بە زۆری گرنگی بەماوەی دووری خەملاندن لەبەهای ڕاستەقینە دەدەن، بێ وەستان لەسەرئەوەی خەملاندنەکە زیاترە یان کەمترە لەبەها ڕاستەقینەکەی ئەو دوورییە پێی دەوترێت **هەڵەی ڕووت Absolute Error** . نموونە لەسەر ئەوە ڕێباز وای خەملاند کە خولەکێك تێپەڕیوە پاش 67 چرکە هەڵەکەی $67-60=7$، و سارا وای خەملاند کە خولەکێك تێپەڕیوە پاش 53 چرکە هەڵەکەی $53-60=-7$ ، هەریەکەیان 7 چرکە لەبەهای ڕاستی دوورکەوتەوە ئەمەش ئەوە دەردەبڕێ کە هەریەکەیان هەڵەیەکی ڕاستی کردوە بڕەکەی دەکاتە 7 چرکە، ژمارە 7 **بەهای ڕووت Absolute Value** بۆ هەریەکە لە دوو ژمارەی 7 و 7- واتە ڕووتی هەریەکەیانە بۆ دەربڕینی ئەمە دەنووسین $7=|-7|=|7|$.

2. لەستوونی چوارەم دووری خەملێنراوی لەبەهای ڕاستی خولەکێك تۆماربکە واتە بەها ڕووتەکەی.

3. بەراورد لەنێوان هەر ژمارەیەك لەستوونی سێیەم و بەهاکەی لەستوونی چوارەم بکە، پەیوەندی نێوان نیشانەی ژمارەکە و نیشانەی بەها ڕووتەکەی چییە؟

دەتوانی بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی بنوێنیت بە بەکارهێنانی هێڵی ژمارەکان. بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی دەکاتە دووری نێوان ئەو خاڵەی دەینوێنی لەسەر هێڵی ژمارەکان و خاڵی بنەڕەت.



دووری نێوان خاڵی ژمارە 7 وخاڵی بنەڕەت دەکاتە 7 یەکە بەهای ڕووتی ژمارە کەدەکاتە 7 واتە دەکاتە 7 واتە $|7|=7$

دووری نێوان خاڵی ژمارە7− و خاڵی بنەڕەت دەکاتە 7 یەکە بەهای ڕووتی ژمارە 7− $|-7|=7$

نواندنی ئەندازەی پێشوو دەمان گەینێتە ئەم لێکدانەوە جەبرییەی دێت:

بەهای ڕووتی ژمارەیەکی ڕاستی هەمان ژمارەیە، ئەگەر ژمارەکە سالب نەبێت، و پێچەوانەکەی ئەگەر سالیب بوو.

بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی **Absolute Value of Real Number**

پێناسەی جەبری $\begin{cases}|x|=x & x\ge 0\\ |x|=-x & x<0\end{cases}$ ئەگەر

پێناسەی ئەندازەیی$|x|$ ئەو دوورییە لەسەر تەوەری ژمارەکان لەنێوان خاڵی x و خاڵی بنەڕەت.

نموونە 1

هەژمێربکە.

أ	ب	ج
$\|8-2\|$	$\|2-8\|$	$\|3-3\|$

شیکار

أ	ب	ج
$\|8-2\|=\|6\|=6$	$\|2-8\|=\|-6\|=6$	$\|3-3\|=\|0\|=0$

هەوڵبدە

هەژمێربکە

أ	ب
$\|5-14\|$	$\|12-2\|$

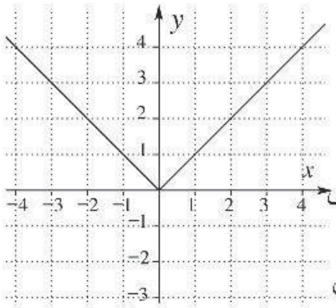
نەخشەی بەهای ڕووت **Absolute Value Function**

نەخشەی بەهای ڕووت ئەو نەخشە پێناسەکراوەیە بە ڕێسای $f(x)=|x|$.

نموونە 2

أ بواری نەخشەی بەهای ڕووت و مەوداکەی چییە؟

ب هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت بکێشە.



شیکار

أ لەبەرئەوەی تۆ دەتوانیت هەژمێری بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی بکەیت، ئەوا بواری نەخشەی بەهای ڕووت بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان. و لەبەرئەوەی بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی دەکاتە ژمارەکە خۆی ئەگەر سالب نەبێت و پێچەوانەکەی ئەگەر سالیب بێت، ئەوا بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی هەموو کات ژمارەیەکی سالب نییە کەواتە مەودای نەخشەی بەهای ڕووت کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی سالب نین.

ب خشتەی بەهای نەخشەی بەهای ڕووت پێکبهێنە.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

بەڕوونکردنەوەیی خاڵەدیاریکراوەکانی ئەم خشتەیە بنوێنە و بیانگەیەنە بەهێڵێکی گونجاو.

هەوڵبدە بواری هەریەکە لەو نەخشانە و مەوداکەیان دیاریبکە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەکەنیان بکێشە.

أ $y=2|x|$ ب $y=|x-2|$

چالاکی 2

کارکردن لەسەر نەخشەی بەهای ڕووت Exploring Absolute Value Functions

پێویستت بەکاغەزی ڕوونکردنەوەیی یان بژمێری ڕوونکردنەوەیی هەیە.

1. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی، هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەکە لەم دوو نەخشەی $y=|x|$ و $y=|x-3|$ بکێشە.
2. چۆن کەمکردنەوەی 3 لە گۆڕاوی x کاردەکاتە سەرهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت . — خاڵی چاودێری ✓
3. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی، هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەکە لەم دوو نەخشەیە $y=|x|$ و $y=|x|-3$ بکێشە. — خاڵی چاودێری ✓
4. چۆن کەمکردنەوەی 3 لەگۆڕاوی y کاردەکاتە سەرهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت.
5. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لەم دوو نەخشەیە $y=|x|$ و $y=-|x|$ بکێشە. — خاڵی چاودێری ✓
6. چۆن پێچەوانەکردنەوەی گۆڕاوی y لەشوێنی سەرهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت کاردەکات.

لە نموونەی پێشوو دەربارەی هەندێ نەخشە کردارت کرد لە نەخشەی بەهای ڕووتەوە وەرگیرابوون، واتە نەخشەی بەهای ڕووت ڕۆڵی پێکهێنەری ئەو نەخشانەیە لێرەوە پێی دەوترێت: نەخشەی بنەڕەت (دایك) هەروەها نەخشە پێکهێنراوەکان لەنەخشەی بنەڕەت (دایك) دەست دەکەون بەچەند جێگۆڕکەیەکی جەبری و دەستکەوتنی هێڵی بەیانی ئەو نەخشانە بەچەند جێگۆڕکەیەکی ئەندازەیی دەبن، کە لەهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەت (دایك) پەیدادەبن. خشتەی بەرامبەر جێگۆڕکێی ئەندازەیی بەرامبەر بە جێگۆڕکێ جەبرییەکە پیشان دەدات، و ڕێدەدات بە کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی درووست بوو لەهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی دایك $y=|x|$.

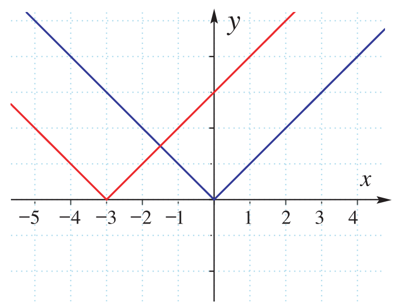
$a>0$ $b>0$

جێگۆڕکێ جەبری	جێگۆڕکێ ئەندازەیی
$y=\|x\|\to y=\|x-a\|$	ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای ڕاستە a یەکە.
$y=\|x\|\to y=\|x+a\|$	ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای چەپە a یەکە.
$y=\|x\|\to y=\|x\|-b$	ڕاکێشانی ستوونی بۆخوارەوە b یەکە
$y=\|x\|\to y=\|x\|+b$	ڕاکێشانی ستوونی بۆ سەرەوە b یەکە.
$y=\|x\|\to y=-\|x\|$	وێنەدانەوەکەی لەتەوەرەی سینی
$y=\|x\|\to y=\|-x\|$	وێنەدانەوەکەی لەتەوەرەی صادی

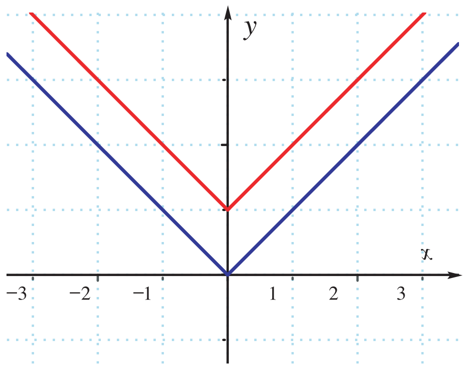
نموونە 3 لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەت $y=|x|$ بکێشە لەپاشان جێگۆڕکێی گونجاو دیاربکە و بەکاربهێنە بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی پەیدابوو.

أ $y=|x+3|$ ب $y=|x|+1$

شیکار



أ زیادکردنی 3 بۆ گۆڕاوی x لە نەخشەی بنەڕەت دەبێتە ڕاکێشانی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکە ئاسۆیی 3 یەکە بۆلای چەپ.



ب زیادکردنی 1 بۆ گۆڕاوی y لەنەخشەی (بنەڕەت) دایك دەبێتە هۆی ڕاکێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی بەستوونی 1 یەکە بۆ سەرەوە.

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 جیهان خەملاندی کەخولەکێك تێپەڕبووە پاش 51 چرکە و ئاری خەملاندی کە خولەکێك تێپەڕبووە پاش 68 چرکە ڕوونیبکەوە چۆن بەراوردی بڕی دووهەڵەکە دەکەیت.

2 نموونەیەك لەسەر ژمارەی b بێنەوە پاساداني $|b|=-b$ بکات ڕوونیبکەرەوە.

3 باسی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت بکە.

4 ئایا بەهای ڕووتی ژمارەیەك دەکرێت سالب بێت؟ ڕوونیبکەرەوە.

5 ئایا بەهای ڕووتی ژمارەیەك دەکرێت بکاتە سفر؟ ڕوونیبکەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هەژمێربکە.

6 $|5-12|$ 7 $|13-12|$ 8 $|-3-3|$ 9 $|4-4|$

10 بواری نەخشە و مەوداکەی دیاربکە پاشان هێڵی ڕوونکردنەوەی بکێشە.

أ $y=|x+1|$ ب $y=|x|+3$

11 لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕووت $y=|x|$ بکێشە و هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەوسێ نەخشەیەش بکێشە. ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییە دیاربکە کە ڕێدەدات بە دەستکەوتنی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی پێکهاتوو کە لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دایك (بنەڕەت) دەردەچێت.

أ $y=|x+1|$ ب $y=|x|+1$ ج $y=-|x|+1$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

بەهای ڕووتی هەریەك لەو ژمارانە هەژمێربکە.

12 17 **13** -33 **14** -7.11 **15** 8.67

16 $\frac{4}{3}$ **17** -2.5 **18** $-3\frac{5}{11}$ **19** 79.2

هەژمێربکە.

20 $|13-24|$ **21** $|0-3|$ **22** $|4-12|$ **23** $|1-11|$

24 $|0-(-3)|$ **25** $|1-27|$ **26** $|11-3|$ **27** $|-14-(-14)|$

28 $|-13+13|$ **29** $|-5-2|$ **30** $|5-(-3)|$ **31** $|-11-11|$

32 $|-5+(-5)|$ **33** $|0-5|$ **34** $|5-10|$ **35** $|-5-10|$

بوار و مەودای هەریەك لەو نەخشانە دیاریبکە.

36 $y=|x+4|$ **37** $y=|x-5|$ **38** $y=|x|+2$

39 $y=|x|-4$ **40** $y=-|x+4|$ **41** $y=-|x-5|$

42 $y=-|x|+2$ **43** $y=-|x|-4$ **44** $y=-4|x|$

45 $y=\frac{1}{2}|x|$ **46** $y=4|x|-1$ **47** $y=4|x-1|$

لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت $y=|x|$ و هێڵی ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە، جێگۆڕکێی ئەندازەی دیاربکە کە ڕێدەدات بەدەستکەوتنی هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەت.

48 $y=|x+4|$ **49** $y=|x-5|$ **50** $y=|x|+2$

51 $y=|x|-4$ **52** $y=-|x+4|$ **53** $y=-|x-5|$

54 $y=-|x|+2$ **55** $y=-|x|-4$

$|a-b|$ و $|b-a|$ لە پرسیاری 56 تا 59 هەژمێربکە.

56 $a=5;\ b=3$ **57** $a=5;\ b=-3$

58 $a=-5;\ b=3$ **59** $a=3;\ b=5$

60 کام پوختەی دەستدەکەوێت بە پشت بەستن بەوەی هەژمێرت کردووە لە پرسیاری 56 تا 59 کە تایبەتە بە $|a-b|$ و $|b-a|$.

61 **جێگۆڕکێیەکان** نەخشەی پێکهاتوو لەنەخشەی بنەڕەت $y=|x|$ بنووسە بەم جێگۆڕکێیەی دیارکراوە.

أ ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای چەپ ماوەی 4 یەکە.

ب ڕاکێشانی ستوون بۆلای خوارەوە ماوەی 2 یەکە.

ج ڕاکێشانی بۆلای چەپ 5 یەکە لەپاشان کشان بۆ خوارەوە 2 یەکە.

د ڕاکێشانی بۆ سەرەوە 5 یەکە، لەپاشان وێنەدانەوە لەدەوری تەوەری سینی.

هـ وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری سینی لەپاشان کشان بەرەو سەرەوە بە 2 یەکە.

62 كیمیا چوار خوێندكار بڕی سۆدیۆمی كەلە 4 تورەگە خوێ دۆزیویانەتەوە بەم شێوەیەی خوارەوە بوو، هەڵەی هەر خوێندكارێك و هەڵە ڕووتەكەیان دیاربكە ئەگەر زانیت وەڵامی ڕاست 8.2mg .

أ شۆنی دۆزییەوە 8.2mg

ب ڕوناك دۆزییەوە 9.0mg

ج نوری دۆزییەوە 8.1mg

د هەوار دۆزییەوە 8.4mg

گەشتەكان دانا بە ئوتومبیلەكەی لە دهۆك دەرچوو بۆ خانەقین بەخێراییەك تێكراییەكەی 140 كیلۆمەتر لەكاتژمێرێكدا و بە كەركوك داتێپەڕی پاش 3 كاتژمێر ئەگەر هێمای گۆڕاوی x بۆ كات بەكاتژمێر لەدەستپێكی دەرچوونی دانا لە دهۆك دابنرێ، دووری نێوان دهۆك و كەركوك دەكاتە $d = 140 \times |x - 3|$.

63 دانا چەند كیلۆمەتری بڕی پاش دوو كاتژمێر لە دەستپێكەوە؟ دوورییەكەی لە كەركوكەوە لەو دەمە چەندە ؟

64 دانا چەند كیلۆمەتری بڕی پاش 4 كاتژمێر لەدەستپێكەوە؟ دوورییەكەی لە كەركوكەوە لەو دەمە چەندە .

تێڕوانینێك بۆ دواوە

65 دوا سێ ژمارە بنووسە: 2 ، 6 ، 10 ، 14 ، 18 ، ___؟ ، ___؟ ، ___؟ .

66 مازن 6 هەزار دیناری لایە چەند وێنە دەتوانێت بكرێت ئەگەر نرخی هەر وێنەیەك یەك هەزار و چارەگێك بێت.

هەژمێربكە.

67 $-3+4$ **68** $-3 \times (0.3)$ **69** $-15-(-15)$ **70** $60 \div 3$

71 $\sqrt[3]{125}$ **72** $-1.4-(-3)$ **73** $4\left(-1\frac{1}{2}\right)$ **74** $(-3.2) \div 4$

75 لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونكردنەوەی هەر نەخشەیەك بكێشە ئەم هێڵانە لە چیدا لەیەكدەچن و لەچیدا جیاوازن.

أ $y = x + 2$ ب $y = \frac{3}{2}x - 1$ ج $y = x$

هەریەك لەم هاوكێشانە لەشێوەی لاری - یەكتربڕین بنووسە.

76 $3x + 2y = 1$ **77** $4x = 2y$

78 $4y = 0$ **79** $2x - 2y = 17$

هەریەك لەم لاسەنگانە شیكاربكە و كۆمەڵەی شیكار لەسەر هێڵی ژمارەكان بنوێنە.

80 $x + 7 \leq 3$ **81** $x - 3 \geq 2$

82 $x + 15 \leq -1$ **83** $x - 3 > 4$

تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

84 دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و خاڵی (x, y) لە ڕووتەختی پۆتاندا هەژماردەكرێت بە ڕێسای $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و هەریەك لەم خاڵانە هەژمێربكە.

أ $(3, 4)$ ب $(12, 5)$ ج $(-8, 6)$ د $(-15, -20)$

وانەی 7

هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە Absolute Value Equations and Inequalities



بۆچی

لەپێوانەکانی زانستی زۆربەی جار پەراوێزی هەڵە هەیە دەتوانرێ فەرامۆش بکرێت. ئەم پەراوێزە دەتوانرێ دەرببرێت بە بەکارهێنانی هاوکێشەکان و لاسەنگەکانی ڕووت بگرنەخۆ و ئەمەش گرنگە لەبوارە جۆراوجۆرەکان وەك لە پیشەسازی و پزیشکی و فیزیکیدا.

ئامانجەکان

- بەجەبری و بەڕوونکردنەوەیی هاوکێشە سادەکانی نەخشەی ڕووت دەگرنەخۆ شیکاردەکات.
- بەجەبری و بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگە سادەکانی نەخشەی ڕووت دەگرنەخۆ شیکاردەکات.
- بە بەکارهێنانی بەهای نەخشەی بەهای ڕووت پرسیارەکان شیکاردەکات.

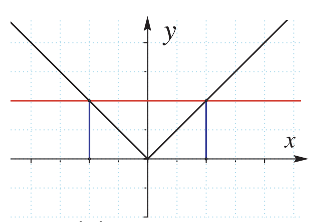
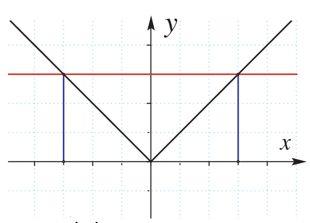
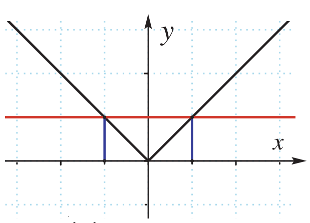
جێبەجێکردنەکان

پیشەسازی

یەکێك لە کۆمپانیاکان پەیکی دداناوی بەرهەم دەهێنێ، کە لە دروستکردنی ئوتومبێلەکاندا بەکاردێت بەپێی ستاندەری دیارکراو ئەگەر تیرەی پەیکەکە لە پێویست گەورەتر بوو، ئەوا پێکهێنانی ئەستەم دەبێت و ئەگەر بچووکتربێ ئەوا ئوتومبیلەکە بەشێوەی گونجاو ناڕوات پەراوێزی هەڵەی ڕێپێدراو لەپێوانی تیرەی ئەم پەیکە چەندە؟

هاوکێشەکان کە نەخشەی بەهای ڕووتیان تێدایە Absolute Value Equations

هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەی ڕووت بەهای یارمەتیدەرە بۆ تێگەیشتنی هاوکێشەکانی نەخشە ڕووت و شیکارکردنیان، لەم وێنە ڕوونکردنەوەیانەی دێت ووردبەرەوە:

$y=\|x\|$ وە $y=2$	$y=\|x\|$ وە $y=3$	$y=\|x\|$ وە $y=1$
		
ئەگەر $\|x\|=2$	ئەگەر $\|x\|=3$	ئەگەر $\|x\|=1$
ئەوا $x=2$ یان $x=-2$	ئەوا $x=3$ یان $x=-3$	ئەوا $x=1$ یان $x=-1$

لەوەی پێشوو ئەم دەرئەنجامانەمان دەستدەکەوێت.

هاوکێشەی نەخشەی بەهای ڕووت **Absolute Value Equation**

کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x| = a$ کاتێک a ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت پێکدێت لە دوو ژمارەی a و $-a$.

کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x| = 0$ پێکدێت لە ژمارە 0

هاوکێشەی $|x| = a$ شیکاری نییە کاتێک a ژمارەیەکی ڕاستی سالب بێت.

$|x|$ ژمارەیەکی سالب نییە چونکە بەپێی پێناسەکەی دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و ئەو خاڵەی پۆی x لەسەر هێڵی ژمارەکان دەنوێنێ، بەڵام ئەو هاوکێشانەی بەهای ڕووتیان تێدایە لەوانەیە شیکاریان ببێتە سالب.

خاڵی چاودێری ✔ هاوکێشەی $|x| = 5$ شیکاربکە.

نموونە 1 هاوکێشەی $|2x+3| = 4$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

هاوکێشەی $|2x+3| = 4$ لەم دوو بارەدا پاسادان بکە.

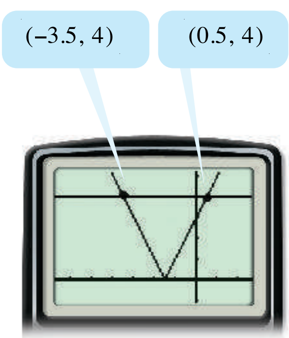
$2x+3=4$ یان $2x+3=-4$

$2x=1$ یان $2x=-7$

$x=0.5$ یان $x=-3.5$

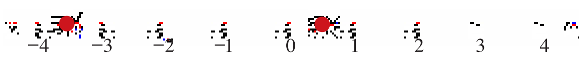
پاسادان بکە ئەگەر $x=0.5$ ئەوا $|2x+3| = |2(0.5)+3| = |4| = 4$

و ئەگەر $x=-3.5$ ئەوا $|2x+3| = |2(-3.5)+3| = |-4| = 4$



دەتوانیت دووبارە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی پاسادانی شیکارەکە بکەیت.

هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y = |2x+3|$ و $y = 4$ بکێشە لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا پۆیەکانی سینی یەکتربڕینی دوو هێڵە ڕوونکردنەوەکە دیاربکە، دەبینیی لە خاڵی $(-3.5, 4)$ و لەخاڵی $(0.5, 4)$

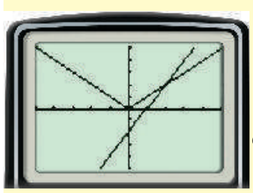


یەکتردەبڕن. بەڵام نواندنی کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان ئەمەیە.

هەوڵبدە هاوکێشەی $|3x+5| = 7$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

چالاکی

دۆزینەوەی شیکارەکان **Exploring Solutions**



وێنەی بەرامبەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y = |x|$ و $y = 2x-2$ دەنوێنێ واتە شیکاری ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $|x| = mx+n$ کاتێک $m=2$ ، $n=-2$ دەنوێنێ.

.1 لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y=|x|$ و $y=2x-2$ بکێشە، ژمارەی خاڵەکانی یەکتربڕین چەندە؟ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاری هاوکێشەکە دیاربکە.

بخەمڵێنە و پاسادان بکە: بیر لەژمارەی شیکارەکانی هاوکێشەی $y=|x|=mx+n$ بکەوە.

2. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی m بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی n بەمەرجێك دوو هێڵە ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y = mx + n$ و $y = |x|$ یەکترببڕن لەدوو خاڵدا، بەڕوونکردنەوەیی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە و شیکاری هاوکێشەی $|x| = mx + n$ بنووسە.

3. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی m بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی n بەمەرجێك دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y = mx + n$ وە $y = |x|$ یەکترنەبڕن بە ڕوونکردنەوەیی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە.

4. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی m بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی n بەمەرجێك دوو هێڵی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەی $y = mx + n$ وە $y = |x|$ یەکتربببڕن لە ژمارەیەکی ناکۆتا لەخاڵدا بە ڕوونکردنەوەی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە.

5. بەپشت بەستن بەمانەی پێشەوە، ژمارەی شیکارە توانراوەکانی هاوکێشەی $|x| = mx + n$ بەکورتی باسبکە.

نموونە 2

هاوکێشەی $|x - 3| = 3x + 5$ شیکاربکە.

شیکار

$$|x - 3| = 3x + 5$$

$x - 3 = 3x + 5$ یان $x - 3 = -(3x + 5)$

$2x = -8$ یان $4x = -2$

$x = -4$ یان $x = -0.5$

پاساودان

$x = -4$	$x = -0.5$
$\|-4 - 2\| \stackrel{?}{=} 3(-4) + 5$	$\|-0.5 - 3\| \stackrel{?}{=} (3(-0.5) + 5)$
$\|-7\| \stackrel{?}{=} 3(-4) + 5$	$\|-3.5\| \stackrel{?}{=} -1.5 + 5$
$7 \stackrel{?}{=} -7$ هەڵەیە	$3.5 \stackrel{?}{=} 3.5$ ڕاستە

شیکارەکە $x = -4$ فەرامۆش دەکرێ چونکە دەبێتە هۆی هەڵەی «$7 = -7$»

بەڵام شیکاری $x = -0.5$ پەسەندە دەتوانیت پاسادانی وەڵامەکە



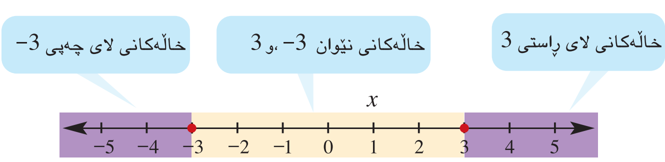
بە ڕوونکردنەوەیی بکەیت لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y = |x - 3|$ و $y = 3x + 5$ وێنەی بەرامبەرت دەستدەکەوێت.

$(-0.5, 3.5)$

هەوڵبدە هاوکێشەی $|x - 4| = x + 1$ شیکاربکە.

ئەو لاسەنگانەی بەهای ڕووتیان تێدایە Absolute Value Inequalities

دوو خاڵی 3 و -3 کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x| = 3$ لەسەر تەوەرەی ژمارەکان دەنوێنن، ئەو دوو ژمارەیە تەوەرەکە بۆ سێ بەش بەشدەکەن.



Absolute Value Inequality — لاسەنگەی نەخشەی بەهای ڕووت

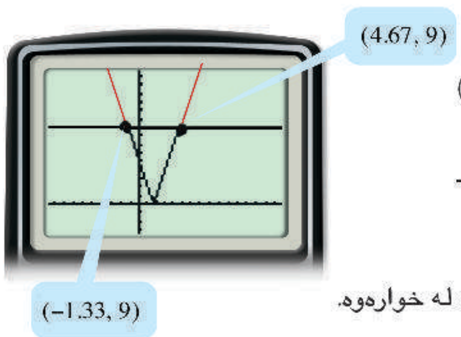
کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $|x| < a$ کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە پێکدێت لەکۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە ساغکردنەوەی $-a < x < a$ دەکات.

کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $|x| > a$ کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە پێکدێت لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە ساغکردنەوەی $x < -a$ یان $x > a$ دەکات.

کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $|x| \geq a$ کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی ناموجەبە پێکدێت لە هەموو ژمارە ڕاستییەکاندا. لاسەنگەی $|x| < a$ شیکاری نییە کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی موجەب نەبێت.

دەتوانیت بیرۆکەی وەك ئەوانە بۆ دوو لاسەنگەی $|x| \geq a$ ، $|x| \leq a$ دابڕێژی.

نموونە 3 لاسەنگەی $|5 - 3x| > 9$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.



شیکار

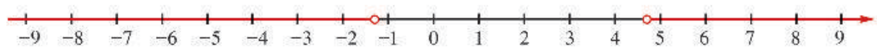
$|5 - 3x| > 9$ (لاسەنگە لە جۆری $|x| > a$)

$5 - 3x > 9$ یان $5 - 3x < -9$

$-3x > 4$ یان $-3x < -9 - 5$

$x < -\frac{4}{3}$ یان $x > \frac{14}{3}$

کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان دەنوێنین وەك لە خوارەوە.



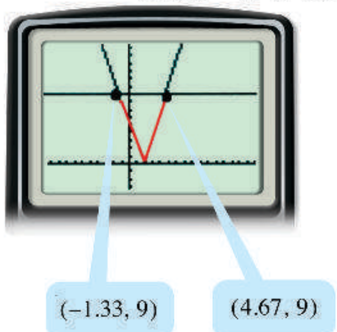
پاسادان

ڕاستی وەڵامەکە بە ڕوونکردنەوەیی پاسادان بکە لەهەمان تەوەرەی پۆتاندا وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = 9$ و هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = |5 - 3x|$ بکێشە، وێنەکە دیاردەکات ئەگەر $x < -\frac{4}{3} \approx -1.33$ یان $x > \frac{14}{3} \approx 4.67$ ئەوا ئەو خاڵەی پۆتانی x لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەی بۆ نەخشەی $y = |5 - 3x|$ بەرزترە لەو خاڵەی پۆتانی x لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی $y = 9$ ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت کە پۆتانی y یەکەم $(|5 - 3x|)$ گەورەترە لەپۆی صادی دووەم.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی ئاراستەی لاسەنگە لەشیکاری ڕاهێنانی پێشوودا گۆڕا.

هەوڵبدە لاسەنگەی $|3x - 7| > 1$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکەش لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

نموونە 4 لاسەنگەی $|5 - 3x| < 9$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.



شیکار

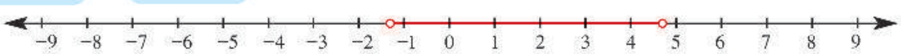
$|5 - 3x| < 9$ (لاسەنگە لە جۆری $|x| < a$)

$5 - 3x < 9$ و $5 - 3x > -9$

$-3x < 4$ و $-3x > -14$

$x > -\frac{4}{3}$ و $x < \frac{14}{3}$

کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان بەم شێوەیە دەبێت.



پاسادان بکە

نموونەی پێشوو دیاریدەکات ئەگەر $-\frac{4}{3} < x < \frac{14}{3}$ ئەوا ئەو خاڵەی پۆیەکەی لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = |5 - 3x|$ بێ نزمترە لەپۆی ئەو خاڵەی پۆیەکە لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = 9$ بێ ئەمەش ئەوە دەسەڵمێنێ کە تانی یەکەم $(|5 - 3x|)$ بچووکترە لەتانی دووەم 9.

خاڵی چاودێری ✓

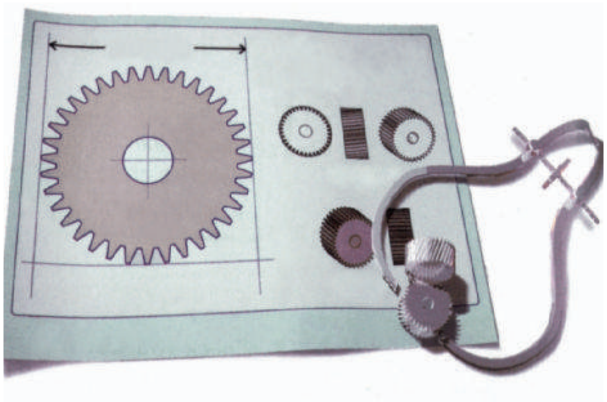
بەراورد لەنێوان دوو لاسەنگەی دوو نموونەکەی پێشوو بکە؟ ڕوونیبکەرەوە.

نموونە 5

جێبەجێکردنەکان

پیشەسازی

لاسەنگەیەك بنووسە نەخشەی بەهای ڕووت بگرێتەخۆ بۆ دیارکردنی پەراوێزی هەڵەی پەسەندکراو لەپێوانی تیرەی ددانەوی دیارکراو لەسەرەتای وانەکە، ئەگەر زانیت تیرەی پەیکەکە دەبێت بکاتە 3.5 لەگەڵ پەراوێزی هەڵە کە دەکاتە ± 0.01 یە

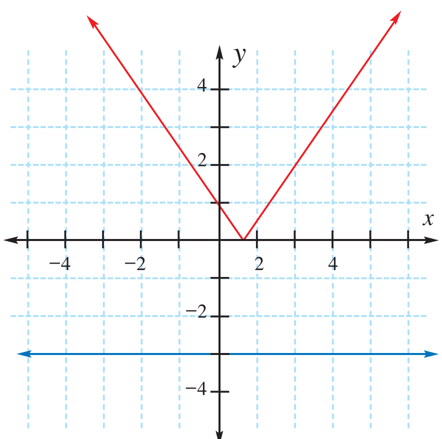


شیکار

با هێمای d بۆ تیرەی پەیکەی ددانەوی بێت، پێویستە ئەو گۆڕاوە مەرجی $3.5 - 0.01 \le d \le 3.5 + 0.01$ پاسادان بکات، واتە $-0.01 \le d - 3.5 \le 0.01$ لاسەنگەی $|d - 3.5| \le 0.01$ پەراوێزی هەڵەی پەسەند دیاریدەکات.

هەوڵبدە

لاسەنگەی $12.00 - 0.01 \le a \le 12.00 + 0.01$ لەشێوەی لاسەنگەیەکی نەخشە ڕووت لەخۆبگرێ بنووسە. ئەو لاسەنگانەی نەخشەی ڕووت لەخۆدەگرن هەیانە شیکاری نییە، لەکاتێکدا لاسەنگەی تریان هەیە کۆمەڵە شیکاریان کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان دەبێت، لاسەنگەی $|2x - 1| < -3$ شیکاری نییە، چونکە ژمارە $|2x - 1|$ ناکرێت بچووکتر بێت لە ژمارەیەکی سالب. لەبارێکی تردا وێنەی بەرامبەر دیاری دەدات کە هەر ژمارەیەکی ڕاستی شیکارە بۆ لاسەنگەی $|2x - 1| > -3$ و لەمەوە کۆمەڵەی شیکاری ئەم لاسەنگەیە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە.



خاڵی چاودێری ✓

لاسەنگەیەکی بەهای ڕووت هێمای $\ge$ لەخۆبگرێت بنووسە و بێ شیکاربێت، لاسەنگەیەکی تربەهای ڕووت هێمای $\le$ لەخۆبگرێت بنووسە، و کۆمەڵە شیکاری کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان بێت.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ئەگەر لاسەنگەی $|x| \le a$ بێ شیکاربێت، ئەوا چی دەڵێیت دەربارەی بەها توانراوەکانی ژمارە a و دەربارەی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $|x| > a$ ؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئایا هاوکێشەی $|3x-5|+4=3$ شیکاری هەیە؟ ڕوونیبکەرەوە.

2 بۆچی هەموو جارێك پاسادانی ڕاستی شیکاردەکەیت کە هاوکێشەیەك بەهای ڕووتی تیابێ.

3 بۆچی دەشێ هاوکێشەیەك بەهای ڕووتی تیابێ، دوو شیکاری هەبێت؟ ڕوونیبکەرەوە.

4 نواندنی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ چۆنیەتی باسکردنی کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەیەك کە بەهای ڕووتی تیابێ یەکسان بێت بەکۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە و پاسادانی شیکارەکەش بکە.

5 $|x-10|=4$ **6** $|2x-5|=3$ **7** $10=|7-3x|$

8 $x+4=|x-2|$ **9** $\frac{1}{2}x+1=|x-2|-1$ **10** $\frac{1}{2}x+1=|x+3|$

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکەش لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

11 $2<|x-4|$ **12** $|2x+1|\geq 5$ **13** $|x+5|<\frac{1}{2}$

14 $\frac{1}{2}|2x+1|\geq 2$ **15** $3|x+1|\leq 2$ **16** $3|x+1|+3>2$

17 ئارام تیرێکی گرتە نیشانەیەك کە 9 مەتر لێوەی دوور بوو تیرەکە لە دووری کەمتر لە 60cm لە نیشانەکەوە کەوتەوە.

أ لاسەنگەیەك بنووسە کە بەهای ڕووتی تێدابێ و ئەو دووریە دەرببڕێ کە تیرەکە بڕیویەتی.

ب ئەو لاسەنگەیە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکەش لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان بنوێنە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

18 هێڵێك بکێشە کە هەریەکە لە هاوکێشەکان یان لاسەنگەکانی لای ڕاست بۆ شیکارەکەی لە لای چەپ بگەیەنێ.

$|x+2|=4$	$-6<x<2$
$|x+2|<4$	$x=2$ یان $x=-6$
$|x+2|<-4$	$x>2$ یان $x<-6$
$|x+2|>-4$	شیکاری نییە.
$|x+2|>4$	کۆمەڵە شیکار کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانە.
$|x+2|=-4$	شیکارەکە باس نەکراوە.

هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

19 $|x+4|=8$ **20** $|x-5|=12$ **21** $|2+x|=10$

22 $|8-x|=1$ **23** $|x-2|=9$ **24** $|x+5|=1$

25 $|2x-15|=11$ **26** $|3x+12|=18$ **27** $|10-4x|=28$

28 $|5+4x|=17$ **29** $|5x-6|=2$ **30** $|10-3x|+5=\frac{1}{2}$

31 $|10x+2|-18=120$ **32** $|4-3x|-9=3$ **33** $|2x-8|+2=1$

شیکاری هەریەك لەم لاسەنگانە بکە.

34 $|x-4|>1$ 35 $|x+5|\le 7$ 36 $|3x|>15$

37 $|-2x|\le 12$ 38 $|4x|\le -8$ 39 $|3-x|\ge -5$

40 $|2+5x|\le 3$ 41 $|2x-3|<11$ 42 $|4x+6|\le 14$

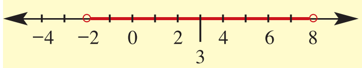
43 $\left|\frac{2x+3}{-5}\right|<3$ 44 $|4x-5|\ge 15$ 45 $|2x-1|\ge -5$

46 $|5x+3|>-2$ 47 $|7-6x|<-4$ 48 $|9x+4|\le -11$

49 $-2|4x+1|\le -4$ 50 $-2|4x+2|\ge -4$ 51 $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|<-7$

پوختە

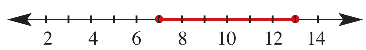
دەتوانیت لاسەنگەیەك بەهای رووتی تیابێ بەسێ شێوە دەرببڕیت

زارەکی	جەبری	رووونکردنەوەیی
دووری نێوان x و ژمارەی 3 کەمترە لە ژمارەی 5	$|x-3|<5$	

ئەو دوو شێوە دەربڕینەی لە پرسیارەکانی 52 تا 54 دا نیە بیانووسە.

52 دووری نێوان x و ژمارە 7 کەمترە لە 4

53 $|x-4|<1$

54 

بەرەنگاری

جێبەجێکردنەکان

55 لاسەنگەی $\left|\frac{4x}{3}\right|\le 2x+5$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکەی لەتەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

لاسەنگەیەك بنووسە کە بەهای رووتی تێدابێت و دەربڕین بۆ هەریەکە لە پرسیاری 56 ، 57 پاشان شیکارەکەی بنووسە.

56 کێشی رزگار 60kg بەڵام پزیشکەکەی پێ راگەیاندوە کە کێشەکەی لەکێشی نموونەییەوە دوورە بەرێژەی 5%، ئەو بەها پەسەندە چەندە بۆ کێشی رزگار؟

57 یەکێك لە پەیمانگەکانی ئامار بڵاویکردووە کە 68% ئەو کەسانەی سەیری فیلمی سینەمایی دەکەن لەکاتی سەیرکردنەکانیاندا کێك دەخۆن. رێژەی سەدی بەرزترین و نزمترین ئەو کەسانە دیاریبکە کێك دەخۆن لەکاتی سەیرکردنیاندا بۆ فلیمەکان ئەگەر بزانیت رێژەی هەڵەی بڵاوکراوەکەی پەیمانگاکە 3% بێت.

روانینێك بۆ دواوە

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە.

58 $\frac{2}{x}=\frac{4}{5}$ 59 $\frac{x-3}{4}=\frac{2x}{16}$ 60 $\frac{10x}{-60}=\frac{2x-10}{8}$

61 شیکاری هاوکێشەی $P=2v+2w$ بکە بە هەژمێری گۆڕاوی v بەپێی گۆڕاوەکانی تر.

هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکانیشیان لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

62 $4x-5<\frac{1}{3}(8x+3)$ 63 $x-9\ge \frac{1}{6}(21+x)$

هەریەکە لەم لاسەنگە ئاوێتانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکانیشیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

64 $(x>2)\wedge(x\le -1)$ 65 $(x\le -2)\vee(x>-4)$

روانینێك بۆ پێشەوە

66 هێڵی رووونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=(x-3)(x+2)$ بکێشە بە دیاریکردنی یەکتربڕینەکەی لەگەڵ تەوەری ئاسوویی. بەراورد بکە لە نێوان هاوکۆڵکەی رادەدارەکە کە لەپێناسەی نەخشەکە دەکات و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری x

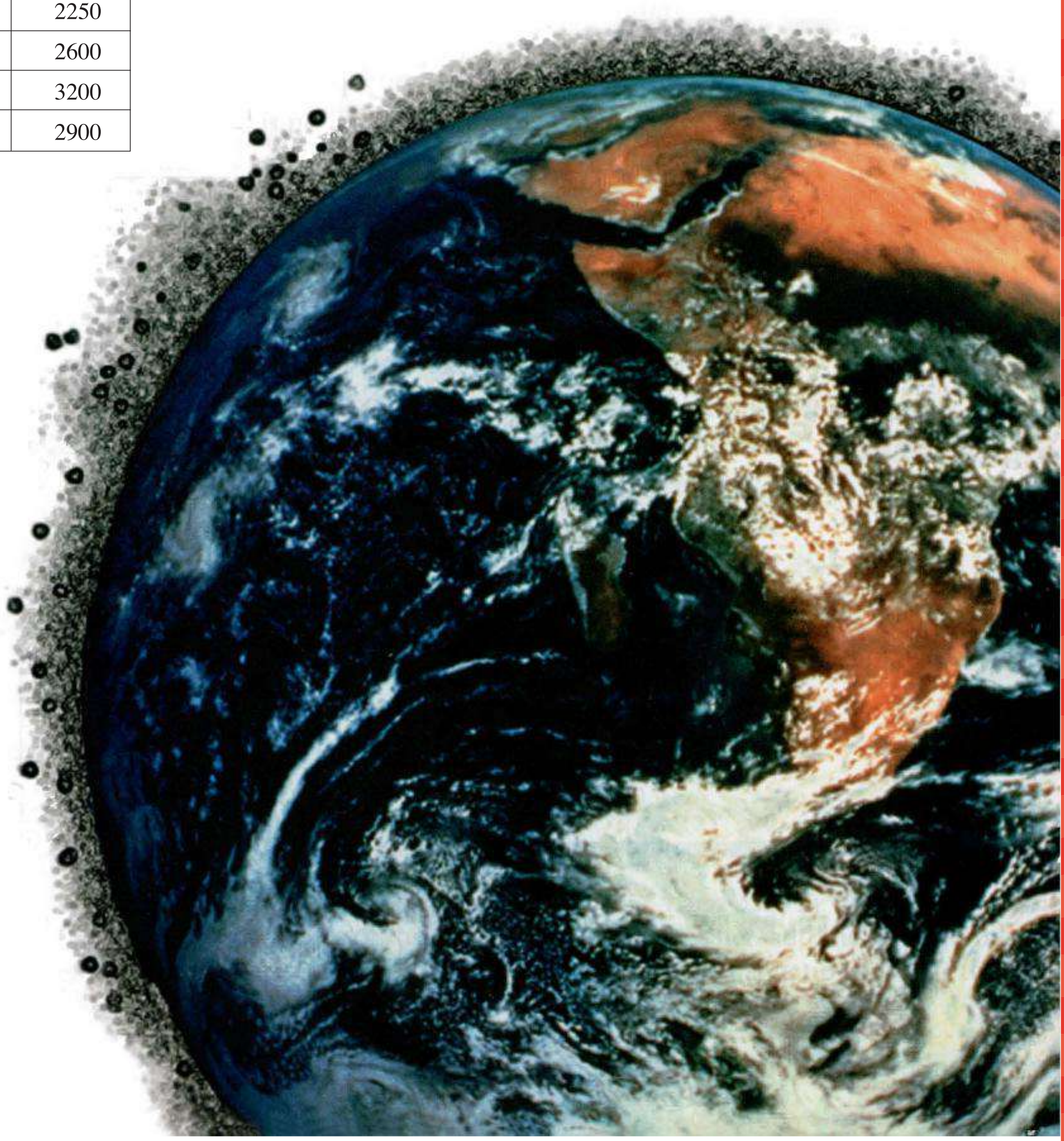
پاشماوەکانی بۆشایی ئاسمان

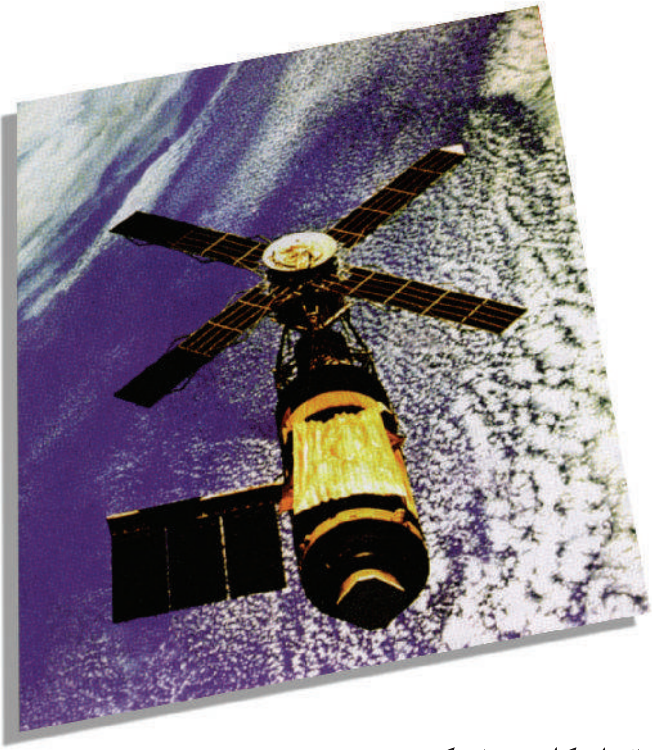
مرۆڤ لەساڵی 1957 ەوە هەستاوە بەهەزارەها چالاکی لەبۆشاییدا، لەمیانەی ناردنی مانگە دەستکردەکان و هەڵسان بەگەشتی بۆشایی. ئەم ئەرکانە بەملیۆنەها پاشماوەیان بەجێ هێشتووە لەو بۆشاییەی نزیکە لە زەوییەوە. بوونی ئەم پاشماوە قەبارە جیاوازانە وای پێویست کردووە کە لە چالاکیە تازەکاندا لەبەر چاوبگیرێت. ئەگەر پاشماوە قەبارە بچووکەکان ترسناک نەبن لەسەر چالاکیە تازەکان، بێ گومان پاشماوە قەبارە گەورەکان ترسناکن. بۆیە پێویستە ئەو پاشماوانە تۆماربکرێن و پێدراوەکان بەبەردەوامی نوێبکرێتەوە.

ئەم خشتەییەی بەرامبەر ژمارەکانی مەزندەکراو دەنوێنێت بۆ پاشماوەکانی مانگە دەستکردەکان و پارچەبووەکان لەنێوان ساڵانی 1965 و 1990 کە بەسەر ماوەکان بۆ 5 ساڵ بەشکراوە.

خشتەی پاشماوەکانی بۆشایی

پارچەی لێبووەوە	مانگەکان	ساڵ
1965	175	900
1970	350	1850
1975	525	2250
1980	700	2600
1985	875	3200
1990	1050	2900





چالاکی 1

1 پێدراوەکانی خشتەکەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ هەژمێری تێکڕای گۆڕانی ژمارەی مانگە دەستکردەکان لەنێوان ساڵی 1965 و1990 ئەم تێکڕایە لە ماوەکانی 5 ساڵدا هەژماربکە و بەراوردی ئەم تێکڕایانە لەگەڵ تێکڕای گۆڕان لەسەر ماوەی گشتی نێوان 1965 و 1990 بکە.

2 نموونەیەکی بیرکاریانە پێك بێنە لەسەر شێوەی نەخشەیەکی هێڵی بۆ گشت پێدراوەکانی مانگەدەستکردەکان. هێمای x بۆ ساڵ دابنێ و ساڵی 1965 با ساڵی سفر بێت.

پاسادانی نموونەکەت بکە بە بەکارهێنانی پێدراوەکانی خشتەکە.

چالاکی 2

1 پێدراوەکانی پارچە لێبۆوەکان لە خشتەکەدا بنوێنە بەمەرجێ تەوەرەی سینەکان نواندنی ساڵەکان بێت (سفر بۆ ساڵی 1965 دابنێ) و تەوەرەی صادەکان نواندنی پارچە لێبۆوەکان بێت.

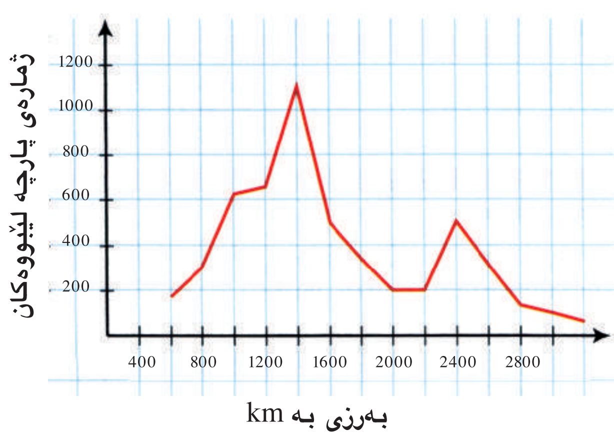
2 وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە کە بەگونجاوی دەزانی بۆ نواندنی ژمارەی پارچە لێبۆوەکان بەدرێژایی ساڵەکان. ئەو باوە باس بکە کە لە وێنەکەوە هەڵیدەهێنجێ.
ئایا باوەڕت وایە نموونەی دەستکەوتووەکەت ڕێگات پێدەدات بۆ دانانی مەزەندەی دوارۆژ کەپشتی پێببەسترێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

چالاکی 3

1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەرت بەکاربهێنە کە دابەشکردنی پاشماوەکانی بۆشایی بەپێی بەرزی نیشان دەدات ڕوونیبکەرەوە چۆن ژمارەیان دەگۆڕێت بەگۆڕانی بەرزی.

2 تێبینی بکە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە کە ژمارەی پاشماوەکان بەپێی بەرزی دیاری دەکات، بریتین لە چەند پارچە ڕاستەهێڵێك ئەمەش ئەوە دەگەیەنێ کە ڕێسای ئەم نەخشەیە دەگۆڕێت بەگۆڕینی ماوەکانی بەرزی، کە هێڵین لەهەموو ماوەکاندا، ئەم ماوانە دیاریبکە و هاوکێشەی ئەم پارچە ڕاستەهێڵانە بەسەر ماوەکان دیاریبکە.

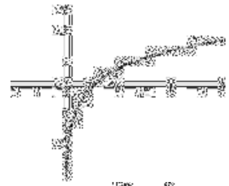
3 هاوکێشەکان بەکاربهێنە کە پێی گەیشتووی بۆ مەزندەکردنی ژمارەی پاشماوەکان لەبەرزی 725km پاشان لەبەرزی 2100km. گفتوگۆبکە لە سوودی ئەو نموونەی دەستکەوتووە.



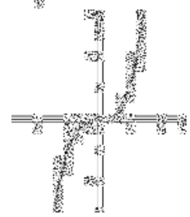
2 پێداچوونەوەی بەش

ئایا ئەم وێنە ڕوونکردنەوە نەخشە دەنوێنێ؟

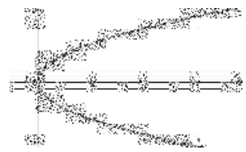
1



2



3



4 ئایا خشتەی بەرامبەر نەخشە دەنوێنێ؟

x	y
2	3
1	-2
0	0
2	-5
3	6

بواری نەخشەو مەوداکەی دیاربکە.

5 $f(x)=3x^2-2x+1$

6 $f(x)=11x-2$

7 $f(x)=3x^2-2$

8 $f(x)=2-3x$

دەرون ناسی زانایانی دەروونناسی پلەی زیرەکی کەسێك دیاردەکەن لەرێگەی هەژمێری ڕێژەی تەمەنی هزری بۆ تەمەنی بە ساڵ، و لێکدانی ئەو ڕێژەیە لە ژمارە 100 لەپاشان نزیکردنەوەی ئەنجام بۆنزیکترین ژمارەی تەواو.

9 پلەی زیرەکی کەسێك تەمەنی بە ساڵ 15 ساڵ بێت و تەمەنە هزریەکەی بەدوابییەکدا 10، 14، 15، 18، 25.

10 پەیوەندی نێوان تەمەنی هزری و پلەی زیرەکی بۆ ئەو کەسە دەربرە بەهۆی خشتە و وێنەی ڕوونکردنەوەیی و ڕێسا.

11 ئایا پەیوەندی نێوان تەمەنی هزری و پلەی زیرەکی نەخشەیە؟

12 کام نەخشە هێڵی نییە؟

أ $f(x)=-2x+1$ ب $f(x)=11x-2$

ج $f(x)=3x^2-2$ د $f(x)=2-3x$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بنووسە لە پرسیارەکانی13 تا 18.

13 لاری 3- و بەخاڵی $(5, 8)$ دەبڕوات.

14 لاری سفر وبەخاڵی$(-5, 4)$دابڕوات.

15 بەدوو خاڵی $(3, 4)$ و $(5, 4)$ دابڕوات.

16 بەدوو خاڵی $(6.8, 2)$ و $(3.6, 6)$ دابڕوات.

17 بەخاڵی $(4, -1)$ دابڕوات و ستوون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی $y=-3x-5$.

18 بەخاڵی $(-3, -2)$ دابڕوات و تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی $y=3.6x-5$.

هاوکێشەی هەریەك لەم ڕاستەهێڵە بەشێوەی گشتی بنووسە.

19 $y+9=4x-8$

20 $3x+y+6=9$

بەڕوونکردنەوەیی ئەم سستەمە هێڵیە شیکاربکە.

21 $\begin{cases} x+6y=3 \\ 3x+y=-8 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 8x+6y=2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$

23 وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەیە دروستبکە.

$f(x)=\frac{1}{2}|x|+1$

24 ئەو جێگۆڕکیانە چین کە نەخشەی $f(x)=-|x+2|-3$ پەیدادەکەن لەنەخشەی دایك (بنەڕەت)؟

هاوکێشەکە شیکاربکە.

25 $\left|\frac{1}{2}x\right|=20$ **26** $12|2x|=108$

27 $\frac{3}{2}|x+4|-5=22$

لاسەنگەکە شیکاربکە.

28 $\left|\frac{1}{2}x\right|>20$ **29** $-5|6x-7|\leq 35$

30 $|6x-7|\leq -35$

ئەندازە لە سێگۆشەکانی $90-60-30$ پەیوەندی نێوان درێژی ژێ (d) و درێژی لا (s) بەرامبەر گۆشەی 30° پەیوەندی ڕاستەوانەیە واتە ڕێژەی یەکەم بۆ دووەم ناگۆڕێت.

31 ئەو ڕێژەیە دیاربکە ئەگەر زانیت درێژی ژێ دەکاتە 45 کاتێك درێژی لا 22.5 بێت.

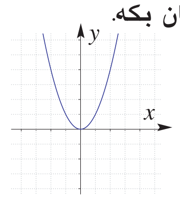
32 d بەپێی s بنووسە.

33 بەهای s هەژمێربکە کاتێك $d=13\text{cm}$.

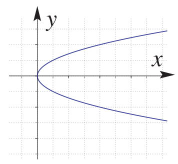
2 تاقیکردنەوەی بەش

ئەگەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکان نەخشە دەنوێنن باسیان بکە.

1



2



بەهای هەریەکە لەم نەخشانە هەژماربکە کاتێك x بەهای -2، سفر، 2 یەك لەدواییەك وەربگرێت

3 $f(x)=5x^2-4x+7$

4 $f(x)=x^2+x-4$

5 **بەکارچوون** کارگێڕی زانکۆیەك باجی تۆمارکردنی بەم شێوەیە دانا: 480 هەزار دینار باجی بەئەندام بوون، 900 هەزار دینار بۆ هەر وانەیەك کە خوێندکار هەڵیدەبژێرێ، نەخشەیەك بنووسە کە تێچوونی تۆمارکردنی خوێندکارێك بنوێنێ لە x وانەدا و تێچوونی تۆمارکردن لە 3 وانەدا چەندە؟

6 **بازرگانی کارگێری** دەزگایەکی چاککردنی ئۆتومبیل 50 هەزار دینار وەردەگرێ بۆ وەرگرتنی ئۆتومبیلێك و دەست نیشانکردنی هۆی لەکارکەوتنەکەی و 45 هەزار دینار بۆ هەر دەمژمێرێك کە کرێکارەکانی کاری چاکردنی تیادەکەن، نەخشەیەك بنووسە کە تێچوونی چاکردنەوەی ئۆتومبیلێك بەپێی ژمارەی کاتژمێرکانی چاکردنەوە دیاردەکات.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم نەخشانە بکێشە.

7 $y=2x$ **8** $y=2x+5$

9 $y=1$ **10** $x=2$

هاوکێشەی هەریەك لەم ڕاستەهێڵانە لەسەر شێوەی لاری یەکتربڕین و برگەی صادی بنووسە.

11 لاریەکەی 2 و بەخاڵی $(-1, 5)$ دابڕوات.

12 لاریەکەی سفر و بەخاڵی $(-5, 7)$ دابڕوات.

13 بەدوو خاڵی $(3, 5)$،$(4, -7)$ دابڕوات.

14 بەڕاستەهێڵی $y=4x+3$ تەریب بێت بەخاڵی $(1, 2)$ دابڕوات.

15 بەخاڵی $(-5, 9)$ دابڕوات، ئەستوون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی $2x+3y=4$

16 **نەخشەکان** سارا تەماشای نەخشەی عێراقی کرد کە بەپێوەری $\frac{1}{5000\,000}$ کێشرابوو واتە هەریەك سەنتیمەتر لەسەر نەخشەکە لەسەر زەوی 5000 000 cm دەنوێنێ، سارا لەسەر نەخشەکە دووری نێوان هەولێر و کەرکوکی پێوا کە 8.4cm بوو دووری نێوان ئەم دوو شارە لەسەر زەوی چەندە؟

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لەم سستەمانە بنوێنە و جۆرەکەی (ئەستەمە یان سنوردارە یان بێ سنوورە) دیاری بکە.

17 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=-8 \end{cases}$ **18** $\begin{cases} 4x+2y=24 \\ 2x-12=-y \end{cases}$

19 $\begin{cases} \frac{1}{3}x-y=4 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$ **20** $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ y+\frac{4}{3}x=-7 \end{cases}$

21 **ئەندازە** کۆی دوو گۆشەی تەواوکەر 90 پلەیە پێوانەی هەریەکە لەو دوو گۆشەیە چەندن ئەگەر پێوانە یەکێکیان 30 پلەی زیاتربێت لەوی تریان؟

شیکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەك لەم سستەمانە جێبەجێ بکە.

22 $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=x-2 \end{cases}$ **23** $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

24 $|3x+1|=4$ **25** $|5x-7|=7$

26 $\left|\frac{1}{2}x-4\right|=3$ **27** $|x-5|=2$

هەریەکە لەم لاسەنگانە شیکاربکە.

28 $|5x+3|\geq -2$ **29** $|2x+13|\leq -3$

30 $\left|\frac{3}{5}x+6\right|\geq 9$ **31** $\left|\frac{3}{2}x+8\right|<3$

جێگۆڕکێ ئەندازەیی کە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=|x|$ دەگۆڕێت بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە دیاربکە.

32 $y=|x-3|$ **33** $y=|x+5|$

34 $y=|x|+2$ **35** $y=|x|-3$

بە ڕوونکردنەوەیی ئەمانە شیکار بکە.

36 $|x-5|+3=0$

37 $|x+4|=5$

38 $|x+13|\leq -3$

2 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە بەدوو خاڵی $(3, 8)$ $(-1, -4)$ دا دەڕوات؟

أ $y = \frac{1}{2}x + 7$ ب $y = -\frac{1}{3}x + 9$

ج $y = 3x - 1$ د $y = -3x - 7$

2 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $y = 5x - 3$ و بەخاڵی $(10, 3)$ دا دەڕوات کامەیە.

أ $y = -\frac{1}{5}x + 5$ ب $y = -\frac{1}{5}x - 3$

ج $y = -5x - 3$ د $y = -5x - 5$

3 کام لەمانەی خوارەوە وەسفی جێگۆڕکێ لەوێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت دەکات بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە $f(x) = -|x-2|$.

أ ڕاکێشانی ئاسۆیی بەمەودای 2 بۆ لای ڕاست و بەوێنە دانەوە بەدەوری تەوەرەی صادەکاندا.

ب ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای ڕاست پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x.

ج ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y.

د ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x .

4 نموونەیەك بهێنەوە بۆ پەیوەندییەك نەخشە پێك نەهێنێت، وەباسی بکە لەبەرچی؟

5 کام لەم نەخشانە نەخشەی هێڵی نین؟

أ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ ب $y = \frac{3-4x}{7}$

ج $y = \frac{7}{3-4x}$ د $y = 3 - x$

6 کام لەمانەی خوارەوە لاری و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری y دیاریدەکەن بۆ ڕاستەهێڵی $2x + 3y = 2$

أ $-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$ ب $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}$

ج $-2; 2$ د $2; -2$

7 لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بە دووخاڵی $(2,-1)$ $(-5, 0)$ دا دەڕوات کامەیە؟

أ -7 ب -3

ج $\frac{1}{7}$ د $-\frac{1}{7}$

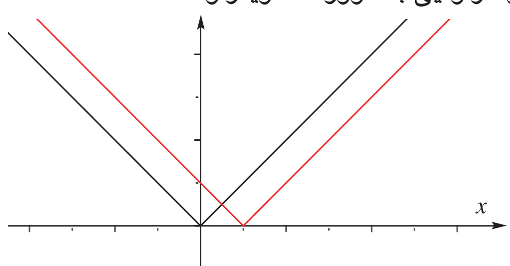
8 کام لەمانەی خوارەوە ڕاستەهێڵێکە کە تەوەری y نابڕێت

أ $y = 4$ ب $x = -4$

ج $x + y = 2$ د $y = 3x$

9 هاوکێشەی $|2 + 3x| = 14$ شیکاربکە.

10 هاوکێشەی ئەو نەخشەیە کامەیە لەوێنە ڕوونکراوەیی بەسوورەکە نوێنراوە.



11 لاسەنگەی $|2 + 3x| \geq 14$ شیکاربکە.

12 کام لەم ڕاستەهێڵانەی خوارەوە تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = -2x - 3$

أ $y = -2x + 2$ ب $y = 2x - 2$

ج $y = 2x + 2$ د $y = -0.5x - 2$

13 ئەو هاوکێشەی بنووسە کە بەدووخاڵی $(-3, 6)$ $(-5, 8)$ دا دەڕوات.

14 خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵی $3x - 5y = 2$ لەگەڵ تەوەری y کامەیە؟ بیدۆزەرەوە.

15 لاری ڕاستەهێڵی $3x - 5y = 2$ دیاریبکەو وێنەکەی بکێشە.

16 مەودای نەخشەی $f(x) = -\left(\frac{x}{3}\right)^2$ کامەیە؟

17 ئایا سستەمی هێڵی $\begin{cases} 3y = 4x - 1 \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases}$

18 سنووردارە یان ستەمە یان بێ سنوورە. هاوکێشەی ئەو نەخشەیەی پەیدادەبێت لە نەخشەی $y = |x|$ بە ڕاکێشانێکی ستوونی بۆ سەرەوە بەمەودای 2 بنووسە.

بەشی سێیەم

بڕەکان و نەخشە دووجاکان

Quadratric Functions and Terms

بەشی 3

بڕەكان و نەخشەی دووجاكان

Quadratic Functions and Terms



كتێبی (الجبر والمقابلة)ی زانای ئسلامی محمد بن موسی الخوارزمی لە كتێبە بەرایییەكان بوو كە باسی جەبری دەكرد. جیهان لەو كتێبە ووشەی جەبری بۆ بەجێما كە دواتر لە زۆربەی زمانەكانی جیهان بەكاردەهات لەگەڵ چەند گۆڕانێك لە دەربڕین. خوارزمی ووشەی «الجبر»ی بەكارهێنا لە مامەڵەكردن لەگەڵ هاوكێشەكان بە مەبەستی شیكاركردنیان. جەبری هاوكێشە بە پێی خوارزمی واتا زیادكردنی ژمارەیەك بۆ هەردوو لای هاوكێشەكە بۆ ئازادكردنی لە نەزانراو و دیاری كردنی بەهاكەی. خوارزمی پشتی بەزانستی جەبر بەست بۆ ئەنجامدانی لێكۆڵینەوەی زانستی لە بوارەكانی جوگرافیاو گەردوون زانی.







ئەستەرلاب سەرەتاییترین ئامێربوو كە زاناكان بۆ لێكۆڵینەوەی شوێنی ئەستێرەكان بەكاریان هێنا.

وانەكان

1. نەخشە دووجاكان.
2. شیتەڵكردنی بڕە جەبرییە دووجاكان.
3. شیكاركردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوكردنی دووجا.
4. شیكاركردنی نەخشەی دووجا بە یاسا (دەستوور).
5. لاسەنگە دووجاكان.

پڕۆژەی بەش.



چەند لاپەڕەیەك لە كتێبی خوارزمی دەربارەی جەبر.

دەربارەی پرۆژەی بەش

بێ گومان زۆر نموونەت دیوە نەخشەی دووجای تێدا بەكارهێنراوە، بۆ دروست كردنی نموونەیەكی بیركاری بە مەبەستی لێكۆڵینەوە لە بارێكی ژیانی ڕۆژانەمان. لەم بەشە پەیوەندی نێوان نەخشەی دووجاو جیاوازی نیوان ژمارەیەك و دوایيەكەی لە شێوازی ژمارەیت بۆ ڕووندەبێتەوە.

دوای تەواوكردنت بۆ بەشەكە توانات دەبێت لەسەر بەكارهێنانی:

- بەكارهێنانی ڕێگەی جیاوازی دواهاتوو بۆ دیاریكردنی ڕێسای نەخشەكە.

وانەی 1

نەخشە دووجاکان Quadratric Functions



بۆچی

دەتوانیت زۆر لەبارەکانی ژیانی ڕۆژانە بە بریکی دووجا بنوێنێت، نموونە بۆ ئەوەش: ئەو ماوەیە ئۆتۆمبیلێك دەیبڕێت کە شوفێرەکەی هەوڵی ڕاگرتنی دەدات لەوکاتەی تێبینی ڕێگرێك دەکات تا بە تەواوی دەیوەستێنێت.

ئامانجەکان

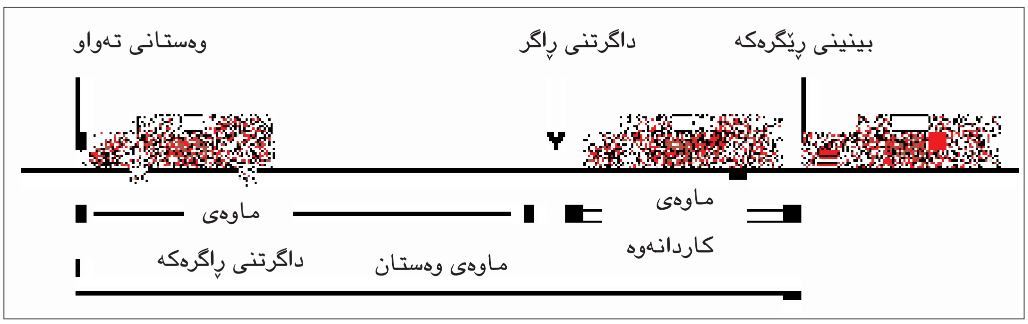
- ناسینەوەی نەخشە دووجای $f(x) = ax^2 + bx + c$ ونواندنی بەڕوونکردنەوەیی.
- وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشە دووجاکان دەنوێنێت و ناوی (برگەی هاوتا) بەکار دەهێنێت بۆ هێڵکاری ڕوونکردنەوەییەکەی.
- سەری برگە هاوتاو تەوەرەکەی دەناسێت.
- ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشە دیاری دەکات بەڕوونکردنەوەیی.
- باری کراوەیی برگە هاوتا دیاریدەکات بەپێی نیشانەی هاوکۆلکەی a

جێبەجێکردنەکان

فیزیا

برە جەبرییە دووجاکان Quadratic Algebraic Expressions

ئەو دوورییەی کە ئۆتۆمبیلێك دەیخایەنێت لە کاتی تێبینیکردنی شوفێرەکەی بۆڕێگرێك تاوەستانی بە تەواوەتی لە دوو دووری پێکدێت وەك لەم وێنەیەدا دیارە:





دەتوانین ماوەی پێویست بۆ وەستانی ئوتۆمبیلەکە بەم برە جەبریە دەربڕین $d(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{160}x^2$ ، کاتێك x خێرایی ئۆتۆمبیلەکە بە km/h ،
$d(x)$دووری وەستانی تەواوبێت بەمەتر، بڕی $d(x)$ پێکدێت لە کۆی ڕادەی $\frac{1}{5}x$ کە دووری کاردانەوەکە و ڕادەی $\frac{1}{160}x^2$ دووری شیلانی ڕاگرەکە دەنوێنێت.
ئەگەر خشتەیەکت دروستکرد بۆ بەهای $d(x)$ بە بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی، سەرنجی ئەوە دەدەیت کە دووری پێویست بۆ وەستانی تەواو25m کاتێك خێرایی 50km/h و 82m ، کاتێك خێرایی 100km/h بەو پێیە دووری تەواوی پێویست بۆ ڕاوەستان سێ ئەوەندە زیادی کرد کاتێك خێراییەکە دوو ئەوەندە زیاد بکات.

تەکنەلۆجیا



بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ئایا پەیوەندی نێوان خێرایی x ودووری وەستان d پەیوەندیەکی هێڵییە؟ ڕوونیبکەرەوە.

بڕە دوجایەکان Quadratic Expressions

بڕە دووجاییەکان ئەو بڕانەن کە بە شێوەی : $ax^2 + bx + c$ دەنوسرێن کاتێك کە a ، b ، c ژمارەی ڕاستیبن و $a \neq 0$ و بە a ، b ، c دەوترێت هاوکۆلکەکانی بڕە دووجاکە.

سادەترین بڕی دووجا x^2 . بە شێوەیەکی گشتی ئەگەر بڕێکی هێڵی لە بڕێکی هێڵی تر بدەیت ئەوا بڕێکی دووجات دەستدەکەوێت وەك لەم چالاکییەدا دەبینرێت.

چالاکی 1

بڕە دووجاکان و بڕە هێڵییەکان Quadratic and Linear Expressions

1. ئەم خشتەیە تەواو بکە.

بڕی یەکەم	بڕی دووەم	ئەنجامی لێکدانی هەر دوو بڕەکە
$2x-2$	$2x+1$	$(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$
$x+1$	$x+1$	
$2x$	$-2x+1$	
$-x+2$	$0.5x+1$	

2. هاوکۆلکەکانی بڕە دووجاکە لەهەر بارێکی پرسیاری پێشوو دیاریبکە.
3. بڕی $(mx+n)$ لە بڕی $(px+q)$ بدە. ئەنجامەکە بە شێوەی بڕێکی دووجا بنووسە، هاوکۆلکەکانی بڕی ئامانج بە پێی n ، m ، p ، q دیاریبکە.

خاڵی چاودێری ✔

نەخشەی دووجا Quadratic Functions

لەبەشی پێشوودا نەخشە هێڵییەکان فێربوویت ولەم بەشەدا جۆرێکی نوێ لە نەخشەکان فێردەبیت کە نەخشەی دووجایە، بیرت بێ شێوەی گشتی نەخشەی هێڵییە بە بڕەهێڵ $f(x) = mx + b$ ناسراوە، بەڵام نەخشەی دووجا وەك بڕێکی دووجا دەناسرێت.

نەخشەی دووجا Quadratic Function

نەخشەی دووجا نەخشەیەکە ڕێساکەی بەهۆی بڕێکی دووجای یەك گۆڕاو دەنووسرێت و بەشێوەی $f(x) = ax^2 + bx + c$ کاتێك a و b و c ژمارەی ڕاستین و $a \neq 0$ و بە a و b و c دەوترێت هاوکۆلکەکانی نەخشە دووجاوە.

سادەترین شێوەی نەخشە دووجاکان $f(x) = x^2$ یە، دەتوانرێت هەموو نەخشەیەکی دووجا لەم نەخشەیەوە پێك بهێنرێت بە بەکارهێنانی جێگۆڕکێی سادە یان ئاوێتە بۆیەش بە $f(x) = x^2$ نەخشەی بنەڕەت دادەنرێت بۆ هەموو نەخشە دووجاکان. نەخشەی $d(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{160}x^2$ نموونەیەکی نەخشە دووجاکانە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

هاوکۆلکەی ڕادەکانی نەخشە دووجاکە کامانەن کە دووری ڕاوەستانی ئۆتومبیلەکە دەنوێنێت؟

نموونه 1 ڕوونبیکەوە نەخشەی $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ نەخشەیەکی دووجایە هاوکۆلکەکانی

شیکار

ڕێگای یەکەم

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=2x(3x+5)-(3x+5)$$
$$=6x^2+10x-3x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

ڕێگای دووەم

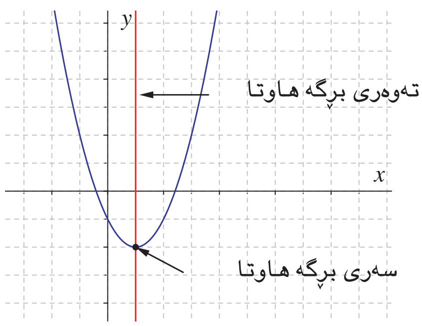
$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=(2x-1)3x+(2x-1)5$$
$$=6x^2-3x+10x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

لەبەر ئەوەی $f(x)=6x^2+7x-5$ نەخشەیەکی دووجایە وهاوکۆلکەکانی بریتین لە $c=-5$ ، $b=7$ ، $a=6$

هەوڵ بدە ڕوونبیکەوە کە $f(x)=(2x-5)(x-2)$ نەخشەیەکی دووجایەو هاوکۆلکەکانی ڕادەکانی دیاریبکە.

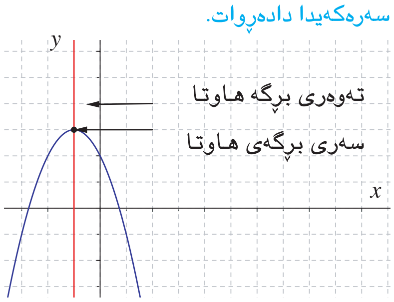
وێنەی ڕونکردنەوەیی نەخشەی دووجا ناوێکی تایبەتی هەیە کە **برگە هاوتایە** ***Parabola*** ئەم وێنانە دوو جۆری جیاواز لە برگەی هاوتا پیشان دەدات.

یەکەم



دووەم

تێبینی بکە کە تەوەری برگە هاوتاکە هەمیشە بە سەرەکەیدا دادەڕوات.



تێبینی ئەوە بکە برگەی هاوتا خاڵێکی ناسراوی هەیە کە پێی دەوترێت سەر و تەوەرەیەکی هاوجێبوونی هەیە. کە برگەکە دەکات بە دوو بەشی جووتبوو. هەروەها سەری برگەکە لە وێنەکەدا، گەورەترین یان بچووکترین بەهای نەخشەکە دیاریدەکات.

ئەگەر لە نەخشەی دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ ورردبیتەوە. بۆت دەردەکەوێت بەهای $f(x)$ بە پێی x هەژمێر دەکرێت. واتا بواری نەخشە دووجاکە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە و بەلاّم مەوداکەی وەك لە دوو وێنە ڕوونکردنەوەیەکەی سەرەوە دەردەکەوێت بریتییە لەکۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەی کەمترنین لە بچوکترین بەهای نەخشەکە(جۆری یەکەم) یان ژمارە ڕاستییەکانی بچووکتر لە گەورەترین بەهای نەخشەکە (جۆری دووەم).

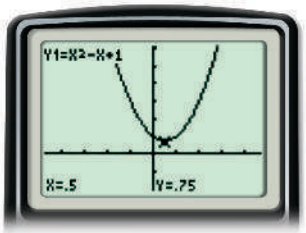
نموونە 2

ئایا سەری ئەم نەخشە دووجایە $f(x)=x^2-x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟
دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان خشتەی بەهاکان بەکاربهێنیت.

شیکار

ڕێگای یەکەم

دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی «ئەگەر هەبێت» بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بۆت دەربکەوێت نەخشەکە بەهای بچووکترینی هەیە.



ئەگەر لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە وردبینەوە دەردەکەوێت کە ڕۆوتانی سەرەکەی $(0.5, 0.75)$

ڕێگای دووەم

دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنیت بۆ دروست کردنی خشتەی بەهاکانی نەخشەکە. لەخشتەکەوە دەردەکەوێت نەخشەکە دەگاتە بچووکترینی بەهاکەی کاتێك $x=0.5$ ، بێت و ئەم بچوکترین بەهایەش دەکاتە 0.75 .

X	Y1
-2.00	7.00
-1.50	4.75
-1.00	3.00
-.50	1.75
0.00	1.00
.50	.75
1.00	1.00

X=.5

لەخشتەکەوە دەردەکەوێت سەری برگە هاوتاکە بریتییە لە خاڵی $(0.5, 0.75)$

تەکنەلۆجیا



بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

هەوڵ بدە ئایا سەری نەخشە دووجای $f(x)=-2x^2-4x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئایا دەتوانیت هاوکێشەی تەوەری هاوجێبوونی نەخشەی دووجای $f(x)=x^2-x+1$ دیاری بکەیت ئەگەر زانیت کە $f(0)=f(1)$ ؟

دەتوانیت بە سەرنجدان لە نیشانەی هاوکۆلکەی a ،بزانیت کە نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ بەهای گەورەترین یان بچووکترین هەیە.

بەهای گەورەترین یان بچووکترین؟ Maximum and Minimum values

- ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك a و b و c ژمارەی ڕاستی بن و $a \neq 0$ بریتییە لە برگەی هاوتا.
- ئەگەر a هاوکۆلکەی x^2 موجەب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە سەرەوە. و سەرەکەی نزمترین خاڵی برگەکەیە وبەهای y تیایدا بچووکترین بەهای نەخشەکەیە.
- ئەگەر a هاوکۆلکەی x^2 سالب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە خوارەوە. و سەرەکەی بەرزترین خاڵی برگەکەیە وبەهای y تیایدا گەورەترین بەهای نەخشەکەیە.
- بەهای y ی سەری برگە هاوتاکە دەبێتە ئەوپەڕی بەهای نەخشەکە، بەهای ئەوپەڕییەکە دەبێتە گەورەترین یان بچووکترین بەها.

نموونە 3

ئەم برگە هاوتایانە بەرەو سەرەوە یان خوارەوە کراوەن. ئایا سەرەکەشی گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

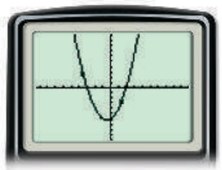
أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$

شیكار

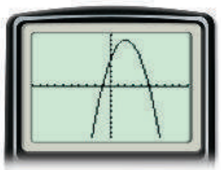
أ هاوكۆلكەی x^2 لەنەخشەی $f(x)=x^2+x-6$ موجەبە بۆیە برگە هاوتاكە كراوەیە بۆ سەرەوەی نەخشەكە و بچووكترین بەهای هەیە لە سەرەكەیدا.

پاسەدان بكە



ب هاوكۆلكەی x^2 لە نەخشەی $f(x)=5+4x-x^2$ سالبە -1 بۆیە برگە هاوتاكە كراوەیە بۆ خوارەوەی نەخشەكە و گەورەترین بەهای هەیە لە سەرەكەیدا.

پاسەدان بكە



چالاكی 2

جێگۆڕكێی نەخشە دووجای بنەڕەتی x^2 Transforming Quadratic Base Function

پێویستیت بە پەڕەی ڕوونكردنەوەیی یان بژمێری ڕوونكردنەوەیی دەبێت.

1. خشتەی بەهاكان دروست بكە، پاشان هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە.

$y=x^2$ $\quad y=x^2+1$ $\quad y=x^2-1$

2. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵكاری نەخشەی بنەڕەتی دێت، ئەگەر 1 مان زیاد یان كەمكرد لە نەخشەكە؟

3. خشتەی بەهاكان دروست بكە،پاشان هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە.

$y=x^2$ $\quad y=(x+2)^2$ $\quad y=(x-2)^2$

4. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵكاری نەخشەی بنەڕەتی دادێت،ئەگەر 2 مان زیاد یان كەمكرد بۆ گۆڕاوە سەربەستەكە؟

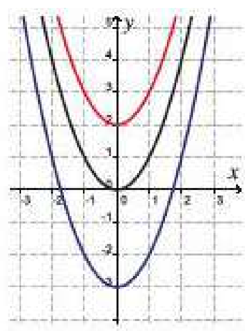
خاڵی چاودێری ✔

5. خشتەی بەهاكان دروست بكە، پاشان هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە

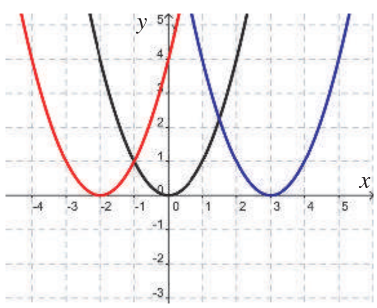
$y=x^2$ $\quad y=(x-2)^2+1$ $\quad y=(x-2)^2-1$ $\quad y=(x+2)^2+1$

6. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵكاری نەخشەی بنەڕەتی دادێت كاتێك 2 لە x كەمبكرێت و 1 بۆ نەخشەكە زیادبكرێت؟ زیاد كردنی 2 بۆ x و كەمكردنی 1 لەنەخشەكە.

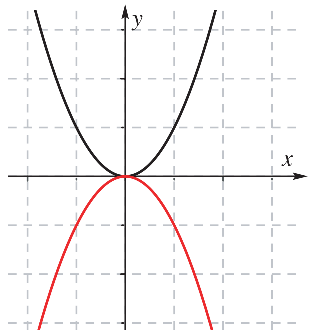
خاڵی چاودێری ✔

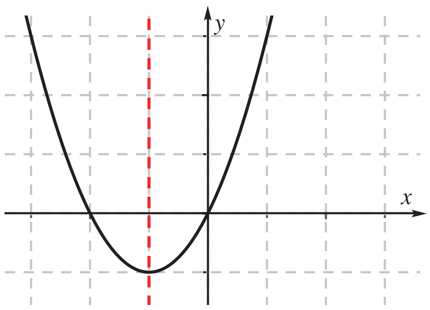


هەریەك لە دوونەخشەی $y=x^2+2$ و $y=x^2-3$ كشانەوەیەكی ستوونی **Vertical** هێڵە ڕوونكردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=x^2$ دەنوێنن كە لە زیادكردنی یان كەمكردنی ژمارەیەك بۆ نەخشەكە دروست بوون. بەمەش هێڵە ڕوونكردنەوەییەكە بەرەو **سەرەوە** یان بەرەو **خوارەوە** دەكشێت.



هەر یەك لە دوونەخشەی $y=(x+2)^2$ و $y=(x-3)^2$ كشانەوەیەكی ئاسۆیی **Horizontal** هێڵی ڕوونكردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=x^2$ دەنوێنێت، كە لە زیادكردنی یان كەمكردنی ژمارەیەك بۆ گۆڕاوە سەربەستەكە دروستبوون. بەمەش هێڵە ڕوونكردنەوەییەكە ئاسۆیی بەرەو لای **ڕاست** یان **چەپ** دەكشێت.





هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = -x^2$ وێنەدانەوەی هێڵکاری نەخشەی بنەڕەتییە بە دەوری تەوەرەی سینی بەڵام سەری برگە هاوتای نەخشەی بنەڕەت بچووکترین بەهای دەنوێنێت و هەمان سەر گەورەترین بەهای نەخشەی $y = -x^2$ یە.

ئەو ڕاستەهێڵە ستوونییەکەی کەبەسەری برگە هاوتاکەدا دەڕوات تەوەرەی هاوجێبونی وێنە ڕوونکردنەوەیەکەیە، لەبەر ئەوەی ئەو ڕاستەهێڵە برگە هاوتاکە دەکات بە دوو بەشی جووتبوو بە ڕاستەهێڵەکەش دەوترێت تەوەرەی برگە هاوتاکە **Axis of Parabola**.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 جیاوازی نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی هێڵە نەخشە و هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووجا ڕوونبکەرەوە.

2 جیاوازی نێوان بڕی جەبری هێڵە نەخشە وبڕی جەبری نەخشەی دووجا ڕوونبکەرەوە.

3 چۆن دەزانیت سەری برگە هاوتا بەهاکەی گەورەترین یان بچووکترینی نەخشەی دووجایە؟

4 پەیوەندی چییە لە نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی وهێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $y = x^2 - 8$.

5 پەیوەندی چییە لە نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی وهێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $y = (x-8)^2$.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ڕوونبیکەوە ئەم نەخشانە، نەخشەی دووجان، هاوکۆلکەکانیان دیاریبکە.

6 $f(x)=(x+1)(x-7)$

7 $f(x)=(x+2)(x+5)$

8 $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

گەورەترین یان بچووکترین بەها؟ وەڵامی پرسیارەکانی 9 تا 14 بدەوە؟

أ ئایا ئەم برگە هاوتایە کراوەیە بۆ سەرەوە یان بۆ خوارەوە؟

ب ئایا بەهای ئەو پەڕی ئەم نەخشانە، گەورەترینە یان بچووکترینە؟

9 $f(x)=x^2-3x+5$

10 $f(x)=2-3x-x^2$

11 $f(x)=x^2+5x+3$

12 $f(x)=x^2-2x+7$

13 $f(x)=-x^2+8x+14$

14 $f(x)=-2x^2-5x+1$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ڕوونیبکەوە ئەم نەخشانە دووجان، هاوکۆلکەی ڕادەکانیش دیاریبکە.

15 $f(x)=(x-3)(x+8)$ **16** $f(x)=(4-x)(7+x)$

17 $f(x)=-(x-2)(x-6)$ **18** $f(x)=(2x+3)(4-x)$

19 $f(x)=x(x-3)$ **20** $f(x)=(x-6)(x+6)$

ئایا ئەم نەخشانە دووجان یان نا؟ ڕوونیبکەوە؟

21 $y=3-x^2$ **22** $y=3-x$

23 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ **24** $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$

25 $y=x^2-x^2(x+7)$ **26** $y=|x^2+5x-2|$

ئەم برگە هاوتایانە بەرەوە سەرەوە یان بەرەو خوارەوە کراوەن. بەهای ئەوپەڕی نەخشەکە بچووکترینە یان گەورەترینە؟

27 $y=2x^2-2x$ **28** $y=-8x^2-x$

29 $y=3-x^2$ **30** $y=4-x^2-2x$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە و بەنزیکەیی بەهای پۆوتانی سەری برگە هاوتاکان دیاریبکە.

31 $y=x^2-x+9$ **32** $y=-x^2-2x+9$

33 $y=4x^2-2x-2$ **34** $y=-0.5(x+4)^2$

35 $y=(x-2)^2-1$ **36** $y=-(x-2)(x+6)$

چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی دەگۆڕێت بۆ هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە.

37 $y=(x-2)^2+3$ **38** $y=(x-5)^2-2$

39 $y=-(x-2)^2+1$ **40** $y=-(x+6)^2-2$

41 $y=-(x-3)^2-2$ **42** $y=(x+4)^2-7$

43 بە چ ڕێگایەك پۆوتانی سەری برگە هاوتای $y=(x+a)(x-a)$ دیاریدەکەیت؟ڕوونیبکەوە.

44 جێگۆڕکێ هێڵکاری ڕوونکردنەوەییە ئەم نەخشانە بکێشە پاشان وەڵامی پرسیارەکان بدەوە.

أ $y=(x+2)(x-4)$ ب $y=2(x+2)(x-4)$

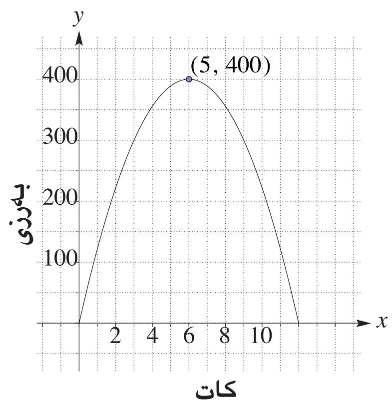
ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ د $y=-(x+2)(x-4)$

هـ $y=-2(x+2)(x-4)$ و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- ئەو شەش هێڵکاریە ڕوونکردنەوەیی لە چی هاوبەشن؟
- کامیان کراوەیە بەرەو خوارەوە؟
- کامیان کراوەیە بەرەو سەرەوە؟



45 فیزیا ئەو هێڵە ڕوونکردنەوەییەی بەرامبەر پەیوەندی نێوان کات بە چرکە وبەرزی گوللە تۆپێك بە مەتر کە بۆ سەرەوە هەڵدراوە دیاریدەکات. گەورەترین بەرزی کە گوللە تۆپەکە دەیگاتیٚ چەندە؟



46 بە چەند چرکە دەگاتە گەورەترین بەرزی؟ تەوەری هێڵکاریە ڕوونکردنەوەیەکە دیاریبکە؟

47 فیزیا جوامێر تیرێکی بۆ سەرەوە بە خێرایی 40 مەتر لە چرکەیەك هاویشت، بەرزی تیرەکە دوای 5 چرکە چەندە بە بەکارهێنانی نەخشەی $y = 40x - 5x^2$ کاتێك کە x کات بێت بە چرکە و y بەرزی بێت بە مەتر، وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە دە نزیکبکەوە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

برِی $2(x-3)^2+1$ لێکدان وکرداری لێدەرکردن لە ناوکەوانەکە وبەرزکردنەوەی بۆ توانی 2 و کرداری کۆکردنەوەی تێدایە.

48 کام لەم کردارانە پێشتر ئەنجام دەدەین؟

49 دووەم کردار چی ئەنجام دەدەین؟

50 سێیەم کردار چی ئەنجام دەدەین؟

ئەمانە شیکاربکە.

51 $\begin{cases} 3y+2x=2 \\ y=x \end{cases}$

52 $\begin{cases} y=4 \\ 3y=2x \end{cases}$

53 ئەو ژمارە دوو ڕەنووسە کامەیە کە دووی لە سیٚ ئەوەندەی سەرجەمی هەردوو ڕەنووسەکەی زیاترە، ڕەنووسی دەیانی 4 لە ڕەنووسی یەکانی کەمترە؟

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

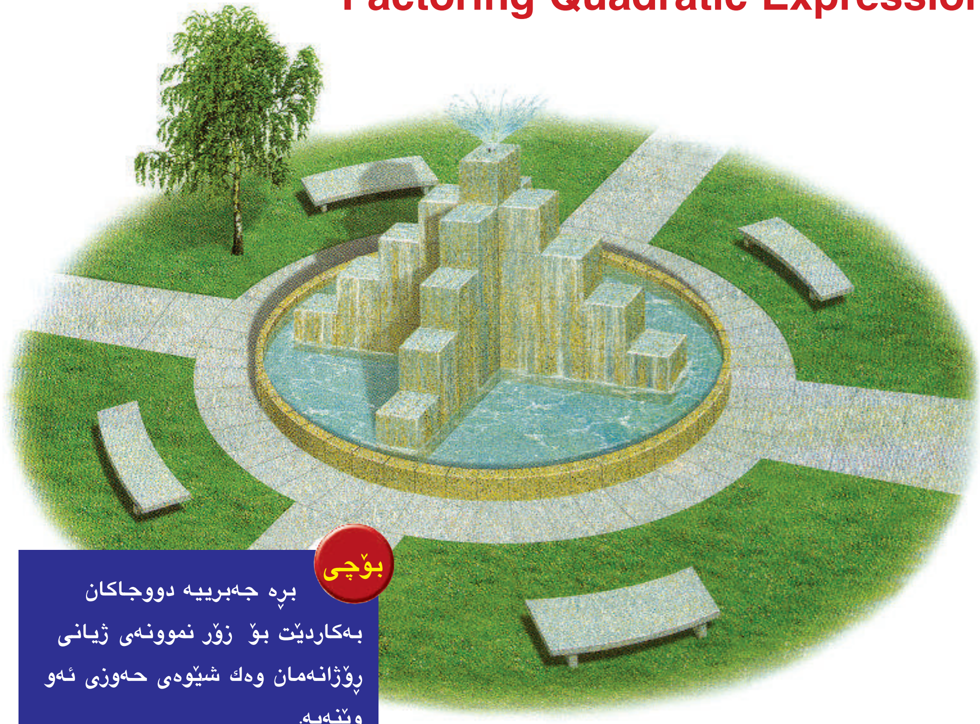
جێبەجێکردنەکان

54 لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە $y = x^2 - 3x + 5$ و $y = x^2 + 7x + 6$ و $y = x^2 - 14x + 49$ خاڵە هاوبەشەکانی نێوان برِگە هاوتاکان و تەوەری سینی دیاریبکە؟

وانەی
2

شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان

Factoring Quadratic Expressions



بۆچی

بڕە جەبرییە دووجاکان بەکاردێت بۆ زۆر نموونەی ژیانی ڕۆژانەمان وەک شێوەی حەوزی ئەو وێنەیە

ئامانجەکان

- بڕە جەبرییە دووجاکان شیتەڵدەکات.
- شیتەڵکردن بەکاردەهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا و دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەی دووجا.

جێبەجێکردنەکان
ئەندازەی تەلارسازی

ئەندازیارێکی تەلارسازی حەوزێکی لە باخچەیەکی گشتیدا دروستکرد، وەک وێنەی سەرەوە لەناویدا چەند خشتەکێکی هاوشێوەی لەسەر شێوە هێمای X ڕیز کرد بە چەند ئاستێکی جیاواز، بە جۆرێک کە ژمارەی خشتەکانی هەر باڵێکی شێوە هێماکەیەکی کەمتربێت لەوەی ژێر خۆی. ڕێسای $m = 2n^2 - n$ هەژمێری ژماری خشتەکانی n مان بۆدەکات بۆ دروستکردنی حەوزێک لە n ئاستدا. ژمارەی ئاستەکانی ناو حەوزێک چەندە کە 66 خشتەکی تیا بێت.

شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان Factoring Quadratic Expressions

کاتێک فێری لێکدانی دوو بڕی جەبری وەک $2x$ و $x+3$ بویت ، ئەنجامی لێکدانەکەت گۆڕی بۆ سەرجەمی کۆمەڵێک ڕادە. شیتەڵکردن کرداری پێچەوانەی لێکدانە، واتە دەتوانیت سەرجەمی کۆمەڵێک ڕادە بگۆڕیت بۆ ئەنجامی لێکدان.

بۆ شیتەڵکردنی بڕێکی دوو ڕادەیی یان زیاتر، گەورەترین کۆلکەی هاوبەش (گ.ك.هـ)دەربێنە (ئەگەر هەبوو) بۆ دوو ڕادەکە وەک لەم نموونانەدا دەیبینیت.

لێکدان

$3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

شیتەڵ

نموونە 1

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە.

أ $3m^2 - 12m$

ب $3x(4x+5) - 5(4x+5)$

شیکار

گەورەترین کۆلکەی هاوبەش دەربێنە:

أ $3m^2 - 12m = 3m \times (m) - 3m \times (4)$

گ. ك. هـ. بریتیە لە $3m$

$= 3m(m-4)$

ب گەورەترین کۆلکەی هاوبەش بریتیە لە $(4x+5)$

$3x(4x+5) - 5(4x+5) = (3x-5)(4x+5)$

هەوڵبدە ئەم دوو بڕە شیتەڵبکە $5x^2 + 15x$ و $4(2x-1) + (2x-1)x$

شێوەی گشتی برێکی دووجا بریتییە لە ax^2+bx+c کاتێک $a\neq 0$

دەتوانیت زۆر لە برە جەبرییە دووجاکان شیتەڵبکەیت. سەرنجی شیتەڵکردنی ئەم برانەی خوارەوە بدە کاتێک $a=1$

شیکاری پرسیار **بگەڕێ بەدوای شێوازێک** سەیری شێوەی شیتەڵکردنی ئەم برە دووجایانە بکە، سەرنج بدە کە کۆی دوو راوە نەگۆڕەکە لە کۆلکەکاندا یەکسانە بە هاوکۆلکەی x لەو برە دووجایەدا پێش شیتەڵکردن و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە راوە نەگۆڕەکە.

$x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$

$5+2=7$	$5\times(2)=10$

$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

$(-5)+(-2)=-7$	$(-5)\times(-2)=10$

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$

$5+(-2)=3$	$5\times(-2)=-10$

$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$

$(-5)+2=-3$	$(-5)\times(2)=-10$

سەرنجدان لەو شێوازانەی پێشوو وا دەکات رێسایەکمان بۆ شیتەڵکردنی بری x^2+bx+c دەستدەکەوێت.

بۆ شیتەڵکردنی بری x^2+bx+c کاتێک b و c دوو ژمارەی تەواوبن، بگەڕێ بۆ دوو ژمارە r و s کەسەرجەمیان b بێت و لێکدانیان c بێت پاشان برەکە بەم شێوەیە شیتەڵبکە.

$$x^2+bx+c=(x+r)(x+s)$$

کاتێک c ژمارەیەکی موجەب بێت، بۆ ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە شیتەڵبکە کە هەمان نیشانەیان هەبێت.

نموونە 2

بری x^2+5x+6 شیتەڵبکە.

شیکار

بخەملێنە وساغبکەوە دەست بە نووسینی $(\;x\;)(\;x\;)$ بکە. بگەڕێ بە دوای دوو هاوکۆلکەی ژمارە 6 هەمان نیشانەیان هەبێت وسەرجەمیان 5 بێت.

$(x+1)(x+6)$	$(x+2)(x+3)$	$(x-1)(x-6)$	$(x-2)(x-3)$
$1\times x+6x$	$2x+3x$	$(-1)x+(-6)x$	$(-2)x+(-3)x$
$\overset{?}{=}$	$\overset{?}{=}$	$\overset{?}{=}$	$\overset{?}{=}$
$7x$	$5x$	$-7x$	$-5x$
هەڵەیە	راستە	هەڵەیە	هەڵەیە

کەواتە، $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

هەوڵبدە بری $x^2-10x-11$ شیتەڵبکە.

کاتێک c ژمارەیەکی سالب بێت لە x^2+bx+c. بەدوای دوو کۆلکەی جیاواز لە نیشانەدا بگەڕێ.

نموونە 3

برێ $x^2-7x-30$ شیتەڵبکە.

شیکار

بخەمڵێنە وپاسەدان بکە. دەست بە نووسینی $(\ x\ )(\ x\ )$ بکە. بگەڕێ بەدوای دوو هاوکۆلکە لەهاوکۆلکەکانی ژمارە (-30) بگەڕێ کە سەرجەمیان بکاتە -7 ئاگاداربە دوو هاوکۆلکەکە لەنیشانە جیاواز بن.

$(x-1)(x+30)$	$(x+1)(x-30)$	$(x-2)(x+15)$
$(-1)x+30x$	$1\times x+(-30)x$	$(-2)x+15\times x$
؟	؟	؟
$29x$	$-29x$	$13x$
هەڵەیە	هەڵەیە	هەڵەیە

$(x+2)(x-15)$	$(x-3)+(x+10)$	$(x+3)(x-10)$
$2x+(-15)\times x$	$(-3)x+10\times x$	$3\times x+(-10)\times x$
؟	؟	؟
$-13x$	$7x$	$-7x$
هەڵەیە	هەڵەیە	ڕاستە

کەواتە ، $x^2-7x-30=(x+3)(x-10)$

هەوڵبدە برێ $3x^2+11x-20$ شیتەڵبکە.

لە لێکدانی دوو برێ $x+3$ و $x-3$ وورد ببەوە.

جیاوازی دوو دووجا

$$(x+3)(x-3)=x^2+3x-3x-9=x^2-9=x^2-3^2$$

شیتەڵکردن بە جیاوازی نێوان دوو دووجا
Factoring The Difference Of Two Squares

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

لە ئەنجامی دووجای $x+3$ و $x-3$ بپشکنە

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=(x+3)(x+3)\\&=x^2+3x+3x+9\\&=x^2+2\times3\times x+3^2\\&=x^2+6x+9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-3)^2&=(x-3)(x-3)\\&=x^2-3x-3x+9\\&=x^2-2\times3\times x+3^2\\&=x^2-6x+9\end{aligned}$$

دووجای تەواو

شیتەڵکردن بە دووجای تەواو — Factoring Perfect Squares

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

نموونە 4

ئەم برانە شیتەڵبکە

أ $x^4 - 16$

ب $4x^2 - 24x + 36$

شیکار

أ
$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$
$$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

ب
$$4x^2 - 24x + 36 = 4(x^2 - 6x + 9)$$
$$= 4\left[x^2 - 2\,(3)x + 3^2\right]$$
$$= 4(x - 3)^2$$

هەوڵبدە ئەم برانە شیتەڵبکە $9x^2 - 49$ و $3x^2 - 6x + 3$

شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن Using Factoring to Solve Quadratic Equations

هەندێك جار دەتوانیت شیتەڵکردن بەکاربهێنین بۆ شیکارکردنی هاوکێشە یان بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە..سفری نەخشەی $f(x)$ بریتییە لە هەر ژمارەیەکی وەك rـ کە پاسەدانی $f(r) = 0$ بکات.

سیفەتی لێکدانی سفری Zero Product Property

ئەگەر $p \times q = 0$ ئەوا $p = 0$ یان $q = 0$

شێوەی گشتی هاوکێشەی دووجا بەم شێوەیە دەنووسرێت $ax^2 + bx + c = 0$ ئەگەر توانیت بڕی $ax^2 + bx + c$ شیتەڵ بکەیت، ئەوا بە جێبەجێکردنی سیفەتی سفری دەتوانیت هاوکێشەکە شیکار بکەیت چۆن **لێکدانی سفر جێبەجێ دەکەیت**؟ بڕەکە شیتەڵبکە وئەنجامی لێکدانیان یەکسان بکە بە سفر.

نموونە 5

هاوکێشەی $x^2 + 6x = -5$ شیکاربکە.

شیکار

هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە $x^2 + 6x + 5 = 0$ لەسەرەتادا بڕی $x^2 + 6x + 5$ شیتەڵبکە، $x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$ دەستدەکەوێت، پاشان $(x + 5)(x + 1) = 0$ یەکسان بکە بە سفر. چۆن ڕەگەکانی هاوکێشەکە $(x + 5)(x + 1) = 0$ دیاری دەکەیت. لە هاوکێشەکەی پێشووەوە دوو هاوکێشەی $(x + 5) = 0$ یا ن $(x + 1) = 0$ مان دەست دەکەوێت و ڕەگەکانیان $x = -5$ یان $x = -1$ دەبێت واتە ڕەگەکانی هاوکێشەکە بریتییە لە -1 و -5 .

نموونە 6

سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە.

أ $f(x) = 2x^2 - 11x$

ب $g(x) = x^2 - 14x + 45$

شیکار

أ
$$2x^2 - 11x = 0$$
$$x(2x - 11) = 0$$
$x = 0$ یان $2x - 11 = 0$

$x = 0$ یان $x = \frac{11}{2}$

ب
$$x^2 - 14x + 45 = 0$$
$$(x - 5)(x - 9) = 0$$
$x - 5 = 0$ یان $x - 9 = 0$

$x = 5$ یان $x = 9$

هەوڵبدە سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە.

أ $f(x) = 3x^2 + 12x$ ب $g(x) = x^2 + 4x - 21$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بیسەلمێنە نەخشەی $f(x) = ax^2 + bx$ کاتێك $a \neq 0$ دوو ڕەگی هەیە کە 0 و $\frac{b}{a}$-یە.

نموونــــە 7

بەگەڕانەوە بۆ نموونەی حەوزەکەی سەرەتای وانەکە، ژمارەی ئاستەکانی حەوزەکە چەندە؟ کاتێك ژمارەی خشتەکەکان 66 بێت.

شیکار

هاوکێشەی $2n^2 - n = 66$ شیکاربکە بە شیتەڵکردن.

$$2n^2 - n - 66 = 0$$ هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە

$$(2n + 11)(n - 6) = 0$$ $2n^2 - n - 66$ شیتەڵبکە

$2n + 11 = 0$ یان $n - 6 = 0$ سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربێنە

$n = -5.5$ یان $n = 6$

ژمارەی ئاستەکان = 6 چونکە ژمارەی ئاستەکان تەنها دەبێت ژمارەی تەواوی موجەب بن.

ڕاهێنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن b و c دەدۆزیتەوە ئەگەر $x^2 + 34x + 285 = (x + b)(x + c)$.

2 چی دەزانی دەربارەی شیتەڵکردنی بڕە دووجای $x^2 + bx + c$ کاتێك c موجەب بێت؟ کاتێك c سالب بێت؟ نیشانەی b چ زانیاریەکت پێ دەبەخشیت لەهەر یەکە لەوبارانەدا.

3 ئەگەر لێکدانی b و c سفر بێت $(bc = 0)$ چی دەڵێیت سەبارەت بە b و c

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە.

یارمەتی

دەستپێبکە بە دەرهێنانی کۆڵکەی هاوبەش ئەگەر هەبوو.

4	$2x^2 - 8x$	**5**	$2x^2 - 6x$
6	$5x^2 - 15x$	**7**	$4x(x + 3) - 7(x + 3)$
8	$3(4b + 7) - 2b(4b + 7)$	**9**	$8d(9d - 5) + 3(9d - 5)$
10	$x^2 + 5x + 6$	**11**	$x^2 + 8x + 7$
12	$x^2 - 5x + 4$	**13**	$x^2 - 4x - 12$
14	$x^2 - 9x - 36$	**15**	$x^2 + 10x - 24$
16	$2x^2 + 9x + 10$	**17**	$3x^2 + 5x + 2$
18	$5x^2 + 13x - 6$	**19**	$8x^2 + 24x - 14x - 42$
20	$12x^2 + 21x - 8x - 14$	**21**	$72x^2 - 56x - 36x + 28$
22	$x^2 - 81$	**23**	$2x^2 - 8$
24	$16x^2 - 25$	**25**	$x^2 + 8x + 16$

سیفەتی لێكدانی سفری بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دوو سفری هەر نەخشەیەك.

26 $f(x)=x^2+7x$

27 $f(x)=x^2+6x+9$

28 $f(x)=x^2+3x-10$

29 ئەندازە كەڕاڵ بۆ بەیەك گەیاندنی چەند خاڵێك 36 پارچە ڕاستەهێڵی كێشا ژمارەی خاڵەكان چەندن؟ ئەگەر بزانیت گەیاندنی n خاڵ پێویستی بە $\frac{n(n-1)}{2}$ پارچە ڕاستەهێڵ هەیە.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

ئەم برانە شیتەڵبكە.

30 $3x+6$

31 $3x^2+18$

32 $10n-n^2$

33 $x-4x^2$

34 $6x-2x^2$

35 $3x^2-15x$

36 $5x(x-2)-3(x-2)$

37 $(x+3)(2x)+(x+3)\times 7$

ئەم برانە شیتەڵبكە.

38 $x^2-16x+15$

39 $x^2+8x+16$

40 $x^2-26x+48$

41 $x^2+4x-32$

42 $x^2+7x-30$

43 $x^2-10x-24$

44 $-22x-48+x^2$

45 $2x+x^2-24$

46 $x^2-56-10x$

47 $56+10x-x^2$

48 $30+x-x^2$

49 $24+10x-x^2$

50 $3x^2+10x+3$

51 $2x^2+5x+2$

52 $2x^2+3x+1$

53 $3x^2+7x+2$

54 $12x^2-3x-9$

55 $3x^2-5x-2$

سیفەتی لێكدانی سفری بەكاربهێنە بۆ شیكاركردنی ئەم هاوكێشانە.

56 $15x^2=7x+2$

57 $3x^2-5x=2$

58 $4x-4=-15x^2$

59 $3x^2+3=10x$

60 $2x^2-15=-7x$

61 $6x^2-17x=-12$

62 $x^2-36=0$

63 $t^2-9=0$

64 $x^4-81=0$

65 $x^4-1=0$

66 $4x^2-9=0$

67 $25x^2-16=0$

68 $x^2-2x+1=0$

69 $x^2+4x+4=0$

70 $9x^2=-6x-1$

71 $4x^2+1=4x$

72 $-4+20x-25x^2=0$

73 $40x+25=-16x^2$

74 $64+16x+x^2=0$

75 $9-6x+x^2=0$

شیتەڵکردن وسیفەتی لێکدانی سفری، بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دوو سفری نەخشە دووجاکان.

76 $f(x)=x^2-7x+10$ **77** $g(x)=t^2-2t-15$

78 $f(x)=4x^2+4x-24$ **79** $g(x)=6x^2+3x-9$

80 $f(x)=t^2+7t-60$ **81** $k(x)=x^2-15x+56$

82 $f(x)=x^2+8x+12$ **83** $g(x)=x^2-3x-40$

84 $g(x)=6x^2+20x-16$ **85** $k(x)=4x^2-8x+3$

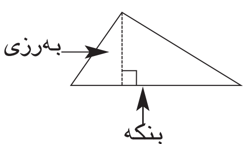
ئەمانە شیتەڵبکە.

بەرنگاری

86 $(a+b)^4-(a-b)^4$ **87** $x^{2n}-1$ **88** $x^{2n}-2x^n+1$

بەستنەوە

89 ئەندازە ڕێسای هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشە بریتییە لە $A=\frac{1}{2}bh$ کە A ڕووبەر و b درێژی بنکە و h بەرزی بێت. ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 89 و 90 . بەرزی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی 42cm^2 یە بنکەکەی 5cm زیاتر بێت لەبەرزییەکەی.



90 درێژی بنکەی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی 12cm^2 و بەرزییەکەی 5cm کەمترە لە لە درێژی بنکەکەی.

جێبەجێکردن

91 وەرزش شەق لێدانی گوڵچیەك لە تۆپێکی پێ کە لەسەر زەوییە بە نەخشەی $h(t)=-4.9t^2+19.6t$ دەنوێنرێت بۆ پێوانی بەرزی تۆپەکە لە ڕووی زەوییەوە بە مەتر. پاش t چرکە، بە چەند چرکە تۆپەکە بەر زەوی دەکەوێت جارێکی تر؟

تێروانینێك بۆ دواوە

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە وکۆمەڵە شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

92 $2x-4>12+5x$ **93** $2x-\frac{3}{4}\geq 7$

94 $3(3x+7)-12\leq 8-(\frac{1}{2}x+9)$ **95** $-2(\frac{2}{3}x+5)-13<0$

لێکبدە.

96 $(3x+4)(-x-5)$ **97** $(-2x+9)(-4x+7)$

98 $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4})(-5x-2)$

تێروانینێك بۆ پێشەوە

ئەگەر توانرا ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە.

99 $(x+2)^2-4$ **100** $(x+9)^2+36$ **101** $(x-1)^2-16$

وانەی 3

شیکارکردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوکردنی دووجا

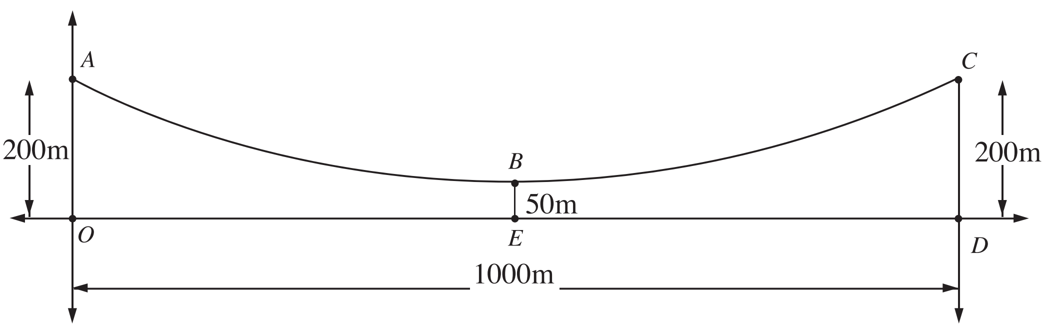
Solving Quadratic Function by Completing The Square



بۆچی
زۆر لە ڕاهێنانەکانی ژیان وەک دیاریکردنی بەرزی بچووکترین خاڵەکانی سیمێک کە پردێکی هەڵگرتووە، دەتوانین شیکاری بکەین لە ڕێگای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە ڕوونکردنەوەیی.

ئامانجەکان
- هاوکێشەی دووجا بە تەواو کردنی دووجا شیکار دەکات.
- سەری برگەی هاوتا دەناسێتەوە و پۆتانەکانی دیاریدەکات.
- بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی دووجا شیکار دەکات.

جێبەجێکردنەکان
ئەندازەی پردەکان



ئەندازیاران نەخشەی پردێکی هەڵواسراو دەکێشن وەک لە وێنەی سەرەوە دەردەکەوێت. لەوێنەکە شێوەی تەلێکی کانزایی دەردەکەوێت کە پردەکەی هەڵگرتووە. ئەو شێوەیە نزیکە لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی دووجا،دەتوانرێت شێوەی ئەو سیمەی پردەکەی هەڵگرتووە بەنزیکەیی وەک نەخشەی $f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ کاتێك $0 \le x \le 1000$ بنوێنرێت ئەم نەخشە دووجایە بە شێوەیەك بنووسە کە بتوانرێت پۆتانی خاڵی بچووکترینی بە ئاسانی دیاریبکەیت، بەرزی خاڵەکەش دیاریبکە.

لەبیرمەکە هاوکێشەی $x^2=k$ بە دیاری کردنی ڕەگە دووجاکانی شیکاردەکرد.

لەبیرت بێ کە لە پۆلی نۆیەم فێربویت کە چۆن هاوکێشەیەك لە جۆری $x^2=k$ شیکار دەکەیت بە دیاریکردنی ڕەگی دووجا.

نموونە 1

هاوکێشەی $x^2=9$ شیکاربکە.

شیکار

$$x^2=9$$

$$x=\pm\sqrt{9}$$

$$x=\pm3$$

دەتوانیت هەمان ڕێگا بەکاربهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی لە جۆری $(a+x)^2=k$

نموونە 2 هاوکێشەی $(x+3)^2=16$ شیکاربکە

شیکار

$$(x+3)^2=16$$
$$x+3=\pm\sqrt{16}$$
$$x+3=\pm4$$
$$x=-7 \text{ یان } x=1$$

کاتێك برە جەبرییەکە لە هاوکێشەدووجاکەدا دووجای تەواو نەبێت. دەتوانیت بیکەیت بە دووجای تەواو، ئەم ڕێگایە یارمەتیت دەدات بۆ شیکارکردنی هاوکێشەکان بە شیتەڵکردن.
لە پەیوەندی نێوان ڕادەکانی دووجا تەواوەکە وورد ببەوە.

باری تایبەت

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$
$$\tfrac{1}{2}(8)=4\rightarrow4^2=16$$

باری گشتی

$$x^2+bx+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2=\left(x+\tfrac{b}{2}\right)^2$$
$$\tfrac{1}{2}b=\tfrac{b}{2}\rightarrow\left(\tfrac{b}{2}\right)^2$$

ڕادە نەگۆڕی c لە دووجا تەواوەکەدا بریتییە لە دووجای نیوەی هاوکۆلکەی x کە یەکسانەبە $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ئەگەر $a=1$.

نموونە 3 ژمارەیەك بۆ هەر برێك زیادبکە تا ببێتە دووجای تەواو.

أ x^2-6x ب $x^2\pm15x$

شیکار

أ لەبەر ئەوەی هاوکۆلکەی $x^2=1$ وهاوکۆلکەی $x=-6$ کەواتە $\frac{1}{2}(-6)=-3\rightarrow(-3)^2=9$
کەواتە دووجا تەواوەکە:
$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

ب لەبەر ئەوەی هاوکۆلکەی $x^2=1$ وهاوکۆلکەی $x=15$ کەواتە $\frac{1}{2}(15)=\frac{15}{2}\rightarrow\left(\frac{15}{2}\right)^2$
کەواتە دووجا تەواوەکە
$$x^2+15x+\left(\tfrac{15}{2}\right)^2=\left(x+\tfrac{15}{2}\right)^2$$

هەوڵبدە ئەو ژمارەیە زیادبکە کەوا دەکات ئەمانە ببنە دووجای تەواو

أ x^2-7x ب x^2+16x

شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە تەواوکردنی دووجا تەواو
Solving Quadratic Equation by Completing The Square

نموونە 4 هاوکێشەی $x^2+6x-16=0$ شیکاربکە

شیکار

$$x^2+6x-16=0$$
$$x^2+6x=16$$
$$x^2+6x+\left(\tfrac{6}{2}\right)^2=16+\left(\tfrac{6}{2}\right)^2$$
بە زیاد کردنی $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ بۆ هەر دوو لای هاوکێشەکە.
$$x^2+6x+9=16+9$$
$$(x+3)^2=25$$

$$x+3=\pm 5$$
$$x+3=5 \text{ یان } x+3=-5$$
$$x=2 \quad \text{یان} \quad x=-8$$

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^2+10x-24=0$ شیکاربکە.

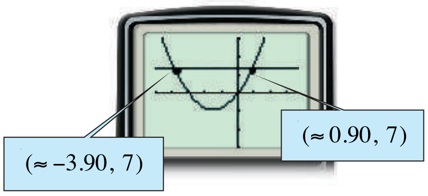
نموونە 5 هاوکێشەی $2x^2+6x=7$ شیکاربکە

شیکار

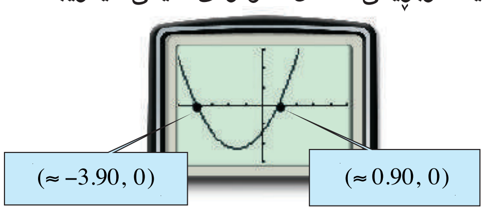
ڕێگای یەکەم: بەجەبری هاوکێشەکە بە تەواوکردنی دووجا شیکاربکە.

$$2x^2+6x=7$$
$$2(x^2+3x)=7$$
$$x^2+3x=\frac{7}{2}$$
$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$(x+\tfrac{3}{2})^2=\frac{7}{2}+\frac{9}{4}$$
$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{23}{4}}$$
$$x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{23}{4}} \text{ یان } x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{23}{4}}$$
$$x\approx 0.90 \quad \text{یان} \quad x\approx -3.90$$

ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی، ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y=7$ و $y=x^2+6x$ بکێشە وپاشان خاڵی یەکتربرینەکان دیاریبکە



یان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووجای $y=2x^2+6x-7$ بکێشە وخاڵەکانی یەکتربرینی لەگەڵ تەوەرەی سینی دیاریبکە.



هەوڵبدە هاوکێشەی $2x^2+10x=6$ شیکاربکە.

شێوەی پێوانەیی هاوکێشەی برگەی هاوتا Standard Form Equation of Parabola

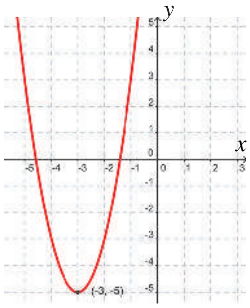
دەزانیت هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=ax^2+bx+c$ برگەی هاوتا دەنوێنێت. ڕێگای تەواوکردنی دووجا بەکاردەهێنیت بۆ بەدەست هێنانی شێوەیەك کە پۆتانی سەری برگەکەت بەڕوونی دەست بکەوێت.

شێوەی پێوانەیی هاوکێشەی برگەی هاوتا

دەتوانیت هاوکێشەی $y=ax^2+bx+c$ لە باری پێوانەیی $y=a(x-h)^2+k$ بنووسین لەم بارەدا خاڵی h ، k پۆتانی سەری برگە هاوتاکەیە $x=h$ هاوکێشەی تەوەرەکەیەتی.

نموونە 6

هاوکێشەی برگە هاوتای $y=2x^2+12x+13$ بەشێوەی پێوانەیی بنووسە وهاوکێشەی تەوەرەکەی بنووسە.



شیکار

$$\begin{aligned} y &= 2x^2+12x+13 \\ &= 2(x^2+6x)+13 \\ &= 2(x^2+6x+9-9)+13 \\ &= 2(x^2+6x+9)-18+13 \\ &= 2(x+3)^2-5 \\ &= 2\left(x-(-3)\right)^2+(-5) \end{aligned}$$

سەری برگە هاوتاکە بریتییە لە $(-3, -5)$ هاوکێشەی تەوەرەکەی $x=-3$.

هەوڵبدە هاوکێشەی برگە هاوتای $y=3x^2-9x-2$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە و هەروەها هاوکێشەی تەوەرەکەی بنووسە.

نموونە 7

بە گەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە هاوکێشەی $f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە و پۆتانی نزمترین خاڵ لەسەر تەلە کانزاییەکە بدۆزەوە.

شیکار

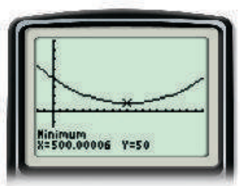
ڕێگای یەکەم : بە جەبری

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200 \\ &= \frac{3}{5000}(x^2-1000x)+200 \\ &= \frac{3}{5000}\left[x^2-1000x+\left(\frac{1000}{2}\right)^2\right]+200-\frac{3}{5000}\times\left(\frac{1000}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{5000}(x-500)^2+50 \end{aligned}$$

نزمترین خاڵی سەر تەلەکە سەری برگە هاوتاکەیە وبریتییە لە $(500, 50)$

ڕێگای دووەم : بە ڕوونکردنەوەیی

وێنەی چەماوەی برگە هاوتای $y=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ بکێشە.
و پۆتانی نزمترین خاڵ دیاربکە.



تەکنەلۆژیا



بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

ڕاهێنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕوونیبکەرەوە چۆن هاوکێشەی $x^2+4x-13=0$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار دەکەیت.
2. ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی $2x^2+4x=15$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار دەکەیت.
3. بەسوود وەرگرتن لە ڕێگای شیکاری نموونە 5 چۆن هاوکێشەی $2x^2+4x=15$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکار دەکەیت.
4. ڕوونیبکەرەوە k ، h چی دەنوێنن لە باری پێوانەیی هاوکێشە دووجاکاندا.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

ژمارەیەك زیادبكە بۆ ئەم هاوكێشە دووجایانە بۆ ئەوەی ببنە دووجای تەواو.

5 $x^2 - 12x$ **6** $x^2 + 5x$

7 هاوكێشەی $x^2 - 4x - 21 = 0$ بە ڕێگای تەواوكردنی دووجا شیكار بكە.

8 هاوكێشەی $2x^2 + 5x = 3$ شیكاربكە.

بەستنەوە

9 جیۆگرافی نەخشە دووجای $y = x^2 + 12x + 20$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە، هاوكێشەی تەوەری برگە هاوتاكە بنووسە.

10 ئەهرۆ هاوكێشەی برگەیەكی هاوتا بە شێوەی $y = -16x^2 + 32x + 5$ نووسی. هاوكێشەكە بە شێوەی دووجای تەواو بنووسە پاشان هاوكێشەی برگە هاوتاكە بە شێوەی پێوانەی بنووسە.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

ژمارەیەك بۆ برە دووجاكە زیادبكە بۆ ئەوەی دووجای تەواوت دەستبكەوێت.

11 $x^2 + 10x$ **12** $x^2 - 14x$ **13** $x^2 - 8x$

14 $x^2 + 2x$ **15** $x^2 + 13x$ **16** $x^2 + 7x$

ئەم هاوكێشانە بە ڕێگای تەواوكردنی دووجا شیكاربكە.

17 $x^2 - 8x = 4$ **18** $x^2 + 2x = 13$

19 $x^2 - 5x - 1 = 4 - 3x$ **20** $0 = x^2 - 6x + 3$

21 $0 = x^2 + 7x - 26$ **22** $0 = x^2 - 3x - 6$

23 $x^2 + 7x + 10 = 0$ **24** $x^2 + 10x + 16 = 0$

25 $x^2 - x = 30$ **26** $3x^2 - 2x - 12 = 0$

27 $-2x^2 + 14x + 60 = 0$ **28** $0 = 3x^2 - 11x + 6$

29 $-10 = x^2 - 8x + 2$ **30** $x^2 + 16x = 2$

31 $4 - x^2 = 10x$ **32** $x^2 = 23 - 15x$

33 $8x - 2 = x^2 + 15x$ **34** $-32x = 16 - x^2$

35 $2x^2 = 22x - 11$ **36** $4x^2 - 8 = -13x$

هەریەك لەم نەخشە دووجایانە بە پێوانەیی بنووسە. پۆتانی سەری برگە هاوتاكەو هاوكێشەی تەوەرەكەی بدۆزەوە.

37 $y = 3x^2$ **38** $y = -x^2 + 2$

39 $y = x^2 - 5$ **40** $y = x^2 + 8x + 11$

41 $y = x^2 - 6x - 2$ **42** $y = -x^2 + 4x + 2$

43 $y = x^2 + 7x + 3$ **44** $y = -3x^2 + 6x - 9$

45 سێ نەخشەی دووجا بنووسە، سەرەکانی بکەونە سەر خاڵی (2, 5)

جێبەجێکردنەکان

46 هاوکێشەی ئەو نەخشە دووجایە بنوسە بە خاڵی (1, 8)دا دەڕوات و سەرەکەی خاڵی (2, 5) بێت.

لە پرسیارەکانی 47 و 48 وەڵامە تەواوەکان بنووسە پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

47 **ئەندازە** درێژی لاکێشەیەك $6m$ مەتری لە پانیەکەی زیاترە. درێژی وپانیەکەی بدۆزەوە کاتێك ڕووبەرەکەی 50m دووجا بێت.

48 نەخشەی $w = x^2 - 12x + 210$ ئەو ووزەیە (بە میگاوات) دەنوێنێت کە ویستگەیەکی بەرهەمهێنانی کارەبا بە دەستی دێنێت، کاتێك x کاتە بە کاتژمێر (لە سفر تا 24)

أ لە کام کاتژمێردا بەرهەمی ویستگەکە کەمترین دەبێت؟

ب هێزی بەرهەم هاتوو چەندە لەوکاتەدا؟

ج لە کام کاتژمێردا ووزەی بەرهەمی ویستگەکە دەکاتە 187 میگاوات؟

49 **کۆکردنەوەی یارمەتی** کۆمەڵەی خاوەن پێداویستییە تایبەتیەکان ساڵانە هەڵدەستێت بە سازدانی ئاهەنگێك بۆ کۆکردنەوەی یارمەتی نەخشەی $P(t) = -16t^2 + 800t - 4000$ پوختەی بەهای یارمەتییەکان (پاش خەرجییەکان) دەنوێنێت. p هێمای بەهای یارمەتیەکانە بە هەزار دینار و t هێمای نرخی بلیتی هاتنە ژوررەوەیە.

أ نرخی بلیتێك چەندە بۆ ئەوەی گەورەترین قازانج بە دەست بێنێت.

ب بەهای گەورەترین قازانجەکە چەندە؟

ج کۆمەڵەکە بە چ نرخیك بلێت بفرۆشێت، بۆ ئەوەی پوختەی یارمەتیەکە 5424 هەزار دینار بێت.



تێڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

50 $5x + 3 = 2x + 18$ **51** $\frac{2(x+3)}{5} = x - 3$ **52** $20 = 6x - 10$

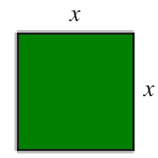
53 بەهای نەخشەی $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ هەژمێر بکە کاتێك $x = 2$ وکاتێك $x = -2$

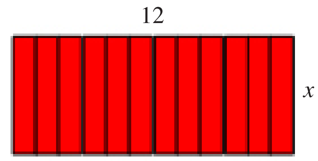
54 بەهای نەخشەی $f(x) = 7 - 4x$ هەژمێر بکە کاتێك $x = 2$ وکاتێك $x = -3$

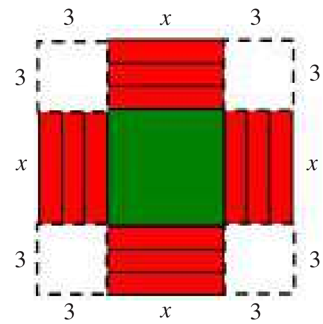
تیروانینێك بۆ پێشەوە

دەروازەیەك لەسەر ڕۆشنبیری ئیسلامی

کتێبی (الجبر والمقابلە)ی زانای ئیسلامی خوارزمی بە پێشەنگی کتێبەکانی بەرایی جەبر دادەنرێت لە جیهاندا. لە کتێبەکەیدا ڕێگایەکی بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بەکارهێناوە، هاوشێوەی ڕێگای تەواوکردنی دووجایە.







بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2+12x=45$ بە تەواوکردنی دووجا، هەڵدەستیت بە وەرگرتنی چوار گۆشەیەك درێژی لایەکی x بێت و 12 لاکێشە درێژی یەکێکیان x ویانییەکەی 1 بێت.

هەنگاوی یەکەم : لاکێشەکانی دابەش کردووە بۆ 4 کۆمەڵەی 3 دانەیی، پاشان هەر کۆمەڵەیەك لە لایەك لە لایەکانی چوار گۆشەکە دادەنرێت وەك لە وێنەکەدا دیارە. ڕووبەری ئەو شێوەی دەردەچێت. بریتیە لە x^2+12x واتا 45 .

هەنگاوی دووەم: بۆ تەواوکردنی دووجا، تەنیا پێویستیت بە زیادکردنی چوار گۆشەیەکە ڕووبەرەکەی 3×3واتا 9 لە هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی شێوەکەوە.

$$9\times4=36$$

ڕووبەری چوار گۆشە گەورەکە یەکسانە بە $45+36=81$ لەوەوە بۆمان دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوار گۆشە گەورەکە 9 یە ولە هەمان کاتدا درێژی لا گەورەکە یەکسانە$3+x+3=6+x$

کەواتە $6+x=9$ لەوەشەوە $x=3$

ڕێگای خوارزمی بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە.

55 $x^2+20x=125$

56 $x^2+32x=33$

57 $x^2+56x=116$

وانەی 4

شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە یاسا (دەستوور)

Solving Quadratic Function By Formula

ئامانجەکان

- یاسا بۆ دۆزینەوەی رەگە راستییەکانی هاوکێشەی دووجا بەکاردێنێت.
- رەگەکانی هاوکێشەکە بۆ دۆزینەوەی تەوەری برگەی هاوتا بەکاردێنێت.

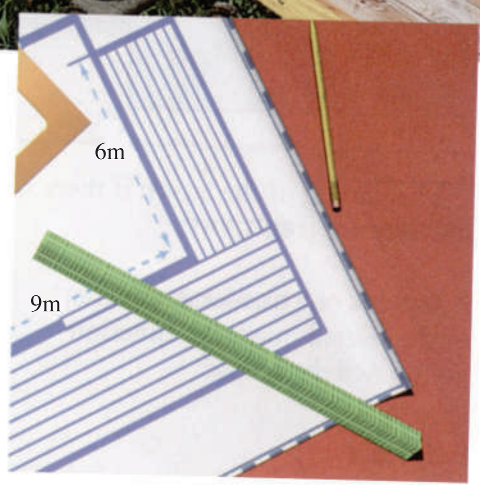
جێبەجێکردنەکان

بیناسازی



بۆچی

دەتوانین یاسای شیکاری هاوکێشەی دووجا بەکاربێنین بۆ شیکاری زۆر لە پیداویستیەکانی ژیانی رۆژانەمان وەک دۆزینەوەی دوو دووری رێڕەوی خانوو.



خیزانی مام جوامێر بریاریدا رێڕەوێك دروست بکات بەهەر دوو لاتەنیشتی ماڵەکەیدا بروات بە پانیەکی نەگۆر. ئەم خێزانە ئەوەندە کەرەستەی هەیە کە $45\ m^2$ لە رێڕەوەکە تەواو بکات. پانی رێڕەوەکە پێویستە چەند بێت؟ دەتوانیت یاسای هاوکێشەی دووجا بەکاربێنیت بۆ شیکاری ئەم پرسیارە ئەگەر بزانیت 9m ، 6m دوو دووری خانوەکەیە، دەتوانیت رێگای تەواو کردنی دووجا بەکاربێنیت بۆ داتاشینی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا لە شێوە گشتییەکەیەوە.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a\neq 0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$ هاوکێشەکە دابەشبکە بەسەر a

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$ $\frac{c}{a}$ لەهەردوو لا دەربکە.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$ بەزیاد کردنی دووجای نیوەی هاوکۆلکەی x بۆ هەر دوولا

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$ کورتبکەوە.

ئەگەر b^2-4ac ژمارەیەکی سالب بێت، واتا هیچ ژمارەیەکی راستی نییە پاسادانی $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ بکات لەم بارەدا هاوکێشەکە رەگی نییە لە ژمارە راستییەکاندا.

ئەگەر $b^2-4ac=0$ ، ئەوا $x+\frac{b}{2a}=0$ لەمەوە $x=-\frac{b}{2a}$. هاوکێشەکە دوو رەگی راستی یەکسانی هەیە، بەهای هەریەکەیان دەکاتە $-\frac{b}{2a}$.

ئەگەر b^2-4ac ژمارەیەکی موجەب، بێت ئەوا: دوو رەگی راستی جیاوازی هەیە بەم شێوەیە:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ ڕەگی دووجای هەر دوو لا وەربگرە.

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کورتبکەوە

$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\frac{b}{2a}$ لەهەر دوولا کەمبکەوە

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کورت بکەوە

بەم یاسایەش دەوترێت «**یاسای دەستوور**»

بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجا Discriminator Of Quadratic Equation

بە بڕی $\Delta=b^2-4ac$ دەوترێت بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجای $ax^2+bx+c=0$ کاتێك $a\neq 0$.

شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا Solving Quadratic Equation

بڕی جیاکەرەوە	ژمارەی ڕەگەکان لە کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییەکان
$\Delta<0$	هاوکێشەکە ڕەگی نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان
$\Delta=0$	هاوکێشەکە دوو ڕەگی یەکسانی هەیە $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$\Delta>0$	هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

نموونە 1 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2+5x-14=0$

شیکار

ئەگەر $x^2+5x-14=0$ بەراورد بکەیت لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی $ax^2+bx+c=0$

دەبینین $a=1$ و $b=5$ و $c=-14$.

هاوکێشەکە بەم شێوەیە شیکاربکە:

1. هەژمێری بڕی جیاکەرەوە بکە بە لەجیاتیدانانی هاوکۆلکەکان $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=5^2-4\times1\times(-14)=25+56=81$$

2. لەبەر ئەوەی بڕی جیاکەرەوە موجەبە، کەواتە هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە کە ئەمانەن:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-5+\sqrt{81}}{2}$ و $=\frac{-5-\sqrt{81}}{2}$

$=2$ و $=-7$

هەوڵبدە بە بەکارهێنانی یاسا $x^2-7x+6=0$ شیکاربکە.

خاڵی چاودێری هاوکێشەی $x^2+5x-14=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە، بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی وەڵامەکەت سەیری نموونەی 1 بکە.

نموونه 2

شیکاری پرسیارەکان

بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشەی $4x^2 = 8 - 3x$ شیکاربکە. دوو ڕەگەکە بە تەواوەتی بنووسە، پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

شیکار

هاوکێشەی $4x^2 = 8 - 3x$ بە شێوەی گشتی بنووسە بەمەش هاوکێشەی $4x^2 + 3x - 8 = 0$ مان دەست دەکەوێت کە هاوکۆلکەکانی بریتین لە $a = 4$ و $b = 3$ و $c = -8$

هەژمێری بڕی جیاکەرەوە دەکەین بە لەجیاتیدانان

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 4(-8) = 9 + 128 = 137$$

بڕی جیاکەرەوە موجەبە کەواتە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

$$= \frac{-3+\sqrt{137}}{8} \quad \text{و} \quad = \frac{-3-\sqrt{137}}{8}$$

$$\approx 1.1 \quad \text{و} \quad \approx -1.8$$

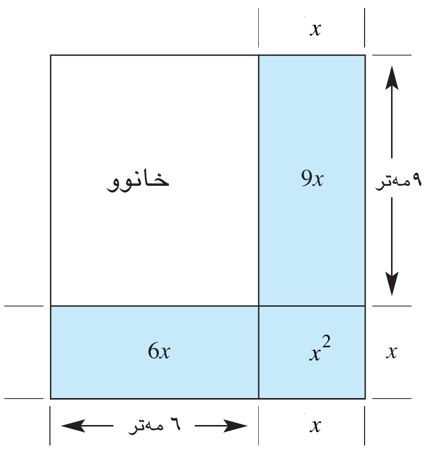
هەوڵبدە

بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشەی $2x^2 - 6x = -3$ شیکار بکە. ڕەگەکان بە تەواوی بنووسە. پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

نموونه 3

جێبەجێکردنەکان

بەگەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە. پانی ڕێڕەوەکە دیاریکە. ئەگەر زانیت خێزانی جوامێر بەشی دروست کردنی $54m^2$ کەرەستەی پێویستی هەیە.



شیکار

ئەو بڕەی کە ڕووبەری ڕێڕەوەکەی دەنوێنێت بریتییە لە:

$$A(x) = x^2 + 9x + 6x = x^2 + 15x$$

داواکراو: شیکاری هاوکێشەی $x^2 + 15x = 54$ بکە

هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە و هاوکۆلکەکانی دیاریبکە.

$a = 1$ و $b = 15$ و $c = -54$

بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەکە هەژمێربکە.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 225 - 4 \times 1 \times (-54) = 441$$

هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە. چونکە بڕی جیاکەرەوە موجەبە

$$x_1 = \frac{-15+\sqrt{441}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-15-\sqrt{441}}{2}$$

$$= 3 \quad \text{و} \quad = -18$$

وەڵامی ڕاست 3 یەچونکە -18 ناگونجێت، درێژی بەسالب ناپێورێت.

هەوڵبدە

بە گەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە پانی ڕێڕەوەکە بدۆزەوە ئەگەر بەشی $34m^2$ کەرستەی پێویست هەبێت. لەوانەکانی پێشووەوە ئەوەت بۆ ڕوونبووەوە کە ڕەگەکانی هاوکێشەی $ax^2 + bx + c = 0$ بریتین لە پۆتانی ئاسۆیی خاڵی یەکتر بڕینی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجاکەی $f(x) = ax^2 + bx + c$ و تەوەری سینەکان.

چالاکی

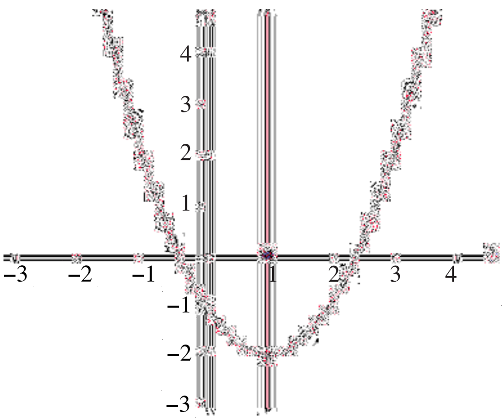
دۆزینەوەی ڕەگی هاوکێشەکان Exploring Roots of Equations

1. خشتەکە بنووسەوە وستونی دووەم وسێیەم تەواو بکە. هەردوو ڕەگی هاوکێشەکە دیاریبکە.
2. هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە، کە ڕێساکەی لای چەپی هاوکێشەکەیە بکێشە، پۆتانی ئاسۆیی سەرەکەی دیاریبکە پاشان دوا دوو ستوونی خشتەکە تەواوبکە.

هاوکێشە	دوو ڕەگەکە	ناوەندی دوو ڕەگەکە	نەخشەی پێناسەکراو بە هاوکێشەکە	جێکەوتەی سینی سەرەکەی
$x^2+2x=0$	$0,-2$	-1	$d(x)=x^2+2x$	-1
$-x^2+4=0$				
$x^2+4x+4=0$				
$2x^2+5x-3=0$				
$-x^2-x+4=0$				

3. بە کورتی باسی دۆزینەوەی پۆی سینی سەری هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی دووجابکە.

خاڵی چاودێری ✓



لەوانەکانی پێشوو ئەوە فێربوین کە ئەگەر k پۆی سینی سەری برگە هاوتاکە بێت ئەوا$(x = k)$ هاوکێشەی تەوەرەکەیەتی، لە لایەکی تریشەوە بە هۆی هاوجێبونی برگە هاوتاکە بە دەوری تەوەرەکەیدا ،دەتوانیت هاوکێشەی تەورەکەی بدۆزیتەوە، لە ڕێگەی هەژمێرکردنی ناوەندی هەردوو ڕەگەکەی

$$k=\frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2}=\frac{-b}{2a}$$

هاوکێشەی تەوەرەی برگە هاوتا بریتییە لە $x=-\frac{b}{2a}$

نموونە 4

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون و پۆتانی سەری نەخشەی $\boldsymbol{f(x)=19+8x+2x^2}$ بدۆزەوە.

شیکار

ڕێسای نەخشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە $f(x)=2x^2+8x+19$ دەبینین کە $a=2$ و $b=8$

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{4}=-2$

پۆوتانی سەری برگە بریتین لە $x=-2$ و $y=f(-2)=2(-2)^2+8(-2)+19=11$

خاڵی $(-2, 11)$ سەری برگە هاوتاکە دەنوێنێت.

هەوڵبدە هاوکێشەی تەوەری هاوجێبوون وپۆتانی سەری نەخشەی $f(x)=x^2-4x+1$ بدۆزەوە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چی دەڵێیت دەربارەی برِی جیاکەرەوەی هاوکێشەیەکی دووجا دوو ژمارەی تەواو بن.

ڕاهێـــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 دوو ڕێگای جیاواز باسبکە بۆ دیاریکردنی پۆی سینی بۆ خاڵەکانی یەکتربڕینی برگە هاوتای $y = x^2 + 2x - 3$ لەگەڵ تەوەری سینی.

2 ڕێگەیەك باسبکە بۆ دیاریکردنی سەری برگە هاوتا.

3 پەیوەندی چییە لە نێوان سەری برگەی هاوتا وتەوەرەکەی؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بە بەکارهێنانی یاسا، ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

4 $x^2 - 5x + 4 = 0$

5 $2x^2 - 5x = 3$

6 بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشە دووجای $3x^2 - 3x = 4$ شیکاربکە، ڕەگەکان بە تەواوی بدۆزەرەوە، پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

سەری برگە هاوتاکە وهاوکێشەی تەوەری هاوجێبوونی بدۆزەرەوە.

7 $f(x) = x^2 - x - 2$

8 $f(x) = 2x^2 - 12x + 11$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بە تەواوی بە بەکارهێنانی یاسا بدۆزەوە (نزیکی مەکەوە).

9 $x^2 + 7x + 9 = 0$

10 $x^2 + 6x = 0$

11 $(x+1)(x-2) = 5$

12 $(x-4)(x+5) = 7$

13 $t^2 - 9t + 5 = 0$

14 $x^2 - 3x - 1 = 0$

15 $x^2 + 9x - 2 = -16$

16 $x^2 - 5x - 6 = 18$

17 $5x^2 + 16x - 6 = 3$

18 $4x^2 = -8x - 3$

19 $3x^2 - 3 = -5x - 1$

20 $x^2 + 3x = 2 - 2x$

21 $x^2 + 6x + 5 = 0$

22 $x^2 + 10x = 5$

23 $-2x^2 + 4x = -2$

24 $5x^2 - 2x - 3 = 0$

25 $-6x^2 + 3x + 19 = 0$

26 $-x^2 - 3x + 1 = 0$

پۆتانی سەری برگە هاوتاکان وهاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبون بنووسە.

27 $y = 7x^2 + 6x - 5$

28 $y = x^2 + 9x + 14$

29 $y = 3 + 7x + 2x^2$

30 $y = 10 - 5x^2 - 15x$

31 $y = 3x^2 + 6x - 18$

32 $y = 14 + 8x - 2x^2$

33 $y = 4 - 10x + 5x^2$

34 $y = -x^2 - 6x + 2$

35 $y = 3x^2 + 21x - 4$

36 $y = -2x^2 + 3x - 1$

37 $y=3x^2-18x+22$

38 $y=-2x^2+8x+13$

39 $y=3x-2x^2+2$

40 $y=-1-8x+12x^2$

41 $y=7x^2-12x+2$

42 $y=2x-2+x^2$

43 $y=4x^2-3x-8$

44 $y=9-3x^2$

45 $y=5x-x^2$

46 $y=5x^2+2x-3$

47 ئەگەر یەكێك لە ڕەگەكانی هاوكێشەی $ax^2+bx+c=0$ هەڵگەڕاوی ڕەگەكەی تری بێت ئەوا بیسەلمێنە $a=c$.

48 **بۆ خوشی** كاڵێ چەند یارییەكی ئاگرینی بە شێوەیەكی ستوونی بۆ ئاسمان هەڵدا بە خێرایی سەرەتایی $58.8\ m/t$ دەتوانیت نەخشەی $h(t)=-4.9t^2+58.8t$ ڕێسای بەرزی بێت پاش t چركە.

أ كاتی پێویست چەندە؟ بۆ ئەوەی یارییە ئاگرینەكە گەورەترین بەرزی هەبێت.

ب گەورەترین بەرزی چەندە؟ كە یارییە ئاگرینەكە دەیگاتێ.

49 **پیشە سازی** سەرۆكی دەستەی بەڕێوەبردنی كارگەیەك داوای لە یەكێك لە ڕاوێژكەرەكانی كرد بەهای فرۆشتنی گوڵدانێكی بۆ دیاریبكات. ڕاوێژكارەكە دوای شیكردنەوەی تێچوون وداواكاری بەكاربەرەكان لەسەر گوڵدان. ئەویش گەیشتە دانانی نەخشەیەك كە قازانجی كارگە بنوێنێت: نەخشەكە بریتی بوو لە $P(x)=-0.3x^2+75x-2000$ كاتێك x بەهای فرۆشتنی یەك گوڵدان بێت.

أ نرخی فرۆشتنی یەك گوڵدان چەندە؟ بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج دەستبكەوێت.

ب نرخی گەورەترین قازانج چەندە؟

ج نرخەكانی فرۆشتن چەندن كاتێك قازانج دەبێت بە سفر.

د بەهاكانی x چەندن بۆ ئەوەی كارگەكە قازانج بكات؟

ه بەهاكانی x چەندن كە كارگەكە توشی زەرەر دەكات؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵانە بە شێوی $y=mx+b$ بنووسە كە بەخاڵی دراودا دەڕوات و ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵە دراوەكە.

50 $(-2,\ 3)$ و $y=x-5$

51 $(4,\ -6)$ و $2x-y=1$

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵانە بە شێوەی $y=mx+b$ بنووسە كە بەخاڵی دراودا دەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵە دراوەكە.

52 $(8,\ -1)$ و $y=-3x+12$

53 $(-4,\ -2)$ و $5x=4-y$

ئەم لاسەنگانە شیكاریكە و كۆمەڵەی شیكار لەسەر تەوەرەی ژمارەكان بنوێنە.

54 $|x+6|>2$

55 $|x-3|<5$

56 $|-4x|\leq 8$

57 $|8-2x|\geq 6$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

58 ئایادەتوانیت كۆمەڵە شیكارێك بۆ هاوكێشەی $2x^2+5x+6=0$ بدۆزیتەوە لە كۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەكاندا؟ ئەمە باسبكە بە پشت بەستن بە یاسا(دەستوور)ی شیكاری هاوكێشە دووجاكان.

وانەی
5

لاسەنگە دووجاکان Quadratic Inequalities

ئامانجەکان

- لاسەنگە دووجاکان دەناسێت وشیکاریان دەکات و کۆمەڵە شیکاریان بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت.



بۆچی

زۆر لە پێداویستییەکانی ڕۆژانەمان وەك ئەوانەی پەیوەندیان بە قازانجی بازرگانیەوە هەیە بە پێی تێچوون وداهات دەتوانین لە ڕێگای لاسەنگەیەکی دووجاوە چارەسەریان بکەین.

جێبەجێکردنەکان
بازرگانی

سۆزان کراس دەدورێت ودەیانفرۆشێت. براکەی لێکۆڵینەوەیەکی ئەنجامدا لەسەر تێچوون ونرخ وداهات بە دینار، بینی تێچوونی مانگانە p ونرخی کراس c ئەم پەیوەندیە دەبەسترێنەوە:

$C(p)=75p+2500$

هەروەها داهات R ونرخ P ئەم پەیوەندیە دەیانبەستێتەوە $R(p)=-25p^2+700p$ بەم شێوەیە قازانجی سۆزان بە پێی پەیوەندی نێوان قازانج G و نرخی فرشتن P دیاری دەکرێت:

$$\begin{aligned}G(p)&=R(p)-C(p)\\&=-25p^2+700p-(75p+2500)\\&=-25p^2+625p-2500\end{aligned}$$

پێویستە سۆزان چۆن نرخی کراسێك دیاریبکات بۆئەوەی قازانجی دەستکەوێت. یان بیرکاریانە، سۆزان چۆن بەهای گۆڕاوی p هەڵدەبژێریت بۆ پاسەدانی ئەم لاسەنگە $-25p^2+625p-2500>0$

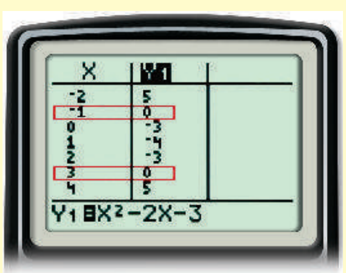
چالاکی

دۆزینەوەی لاسەنگە دووجاکان Exploring Quadratic Inequalities

تەکنەلۆجیا
بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی



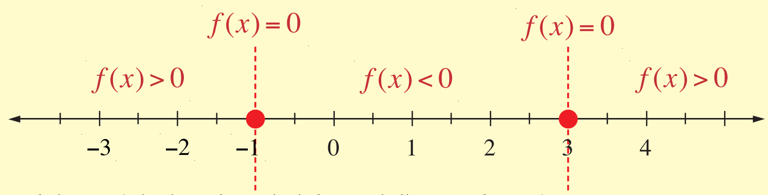
پێویستیت بە بژمێری ڕوونکردنەوەیی دەبێت .
خشتەی بەرامبەر بەهاکانی نەخشەی $f(x)=x^2-2x-3$ دیاریدەکات کە گۆڕاوی x وەردەگرێت لە نێوان -2 و 4
ئەگەر لەخشتەکە وورد ببینەوە سێ باری جیاواز دەبینرێت:



$f(x)=0$ ئەگەر $x=-1$ یان $x=3$

$f(x)>0$ ئەگەر $x<-1$ یان $x>3$

$f(x)<0$ ئەگەر $-1<x<3$



1. ئەم خشتەیە بنووسەوە وتەواوی بكە بەهاكانی x كامانەن كە پاسادانی هاوكێشەكە دەكەن.
بەهاكانی x كامانەن كە پاسەدانی لاسەنگەكە دەكەن.

نەخشە	ژمارەی خاڵەكانی یەكتر بڕینی هێڵی ڕوونكردنەوەیەكە لەگەڵ تەوەرەی سینیەكان	بەهاكانی x كاتێك $f(x)=0$	بەهاكانی x كاتێك $f(x)>0$	بەهاكانی x كاتێك $f(x)<0$
$f(x)=x^2-4$	2			
$f(x)=-x^2+2x+3$				

2. هەمان كاری پێشوو دووبارەبكەوە.

نەخشە	ژمارەی خاڵەكانی یەكتر بڕینی هێڵی ڕوونكردنەوەیەكە لەگەڵ تەوەرەی سینیەكان	بەهاكانی x كاتێك $f(x)=0$	بەهاكانی x كاتێك $f(x)>0$	بەهاكانی x كاتێك $f(x)<0$
$f(x)=x^2$	1			
$f(x)=-x^2$				

3. هامان كاری پێشوو دووبارەبكەوە.

نەخشە	ژمارەی خاڵەكانی یەكتر بڕینی هێڵی ڕوونكردنەوەیەكە لەگەڵ تەوەرەی سینیەكان	بەهاكانی x كاتێك $f(x)=0$	بەهاكانی x كاتێك $f(x)>0$	بەهاكانی x كاتێك $f(x)<0$
$f(x)=-x^2+x-1$	0			
$f(x)=x^2+x+3$				

خاڵی چاودێری ✔

أ ئەگەر هێڵكاری نەخشەیەك تەوەری سینی لە دوو خاڵدا ببڕێت، ئەوا تەوەرەی سینی دابەش دەكات بۆ ——— ماوەی جیاواز.

ب ئەگەر هێڵكاری نەخشەیەك تەوەری سینەكان لە یەك خاڵدا ببڕێت، ئەوا تەوەرەكە دابەش دەكات بۆ ——— ماوەی جیاواز.

ج ئەگەر هێڵكاری نەخشەیەك تەوەری سینی نەبڕێت، ئەوا تەوەرەی سینی دابەش دەكات ——— بۆ ماوەی جیاواز.

دەتوانیت كۆمەڵەی شیكاری لاسەنگە دووجاكە بە هۆی دیاریكردنی ڕەگەكانی هاوكێشە دووجاكە یان لە ڕێگای هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی نەخشە دووجاكەوە بدۆزیتەوە.

نـــــموونـــــه 1

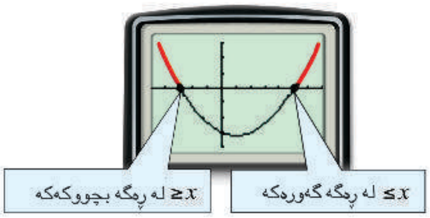
لاسەنگەی $x^2-2x-15\geq 0$ شیکاربکە. کۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجای پەیوەست بە لاسەنگەکەوە دیاردەخات کە کۆمەڵەی شیکار لەدوو بەش پێکدێت.

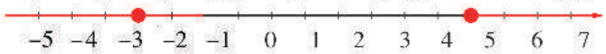


$x\geq$ ڕەگە بچووکەکە یان $x\leq$ ڕەگە گەورەکە.



$$x^2-2x-15=0$$
$$(x+3)(x-5)=0$$
$$x=5 \quad \text{یان} \quad x=-3$$

کەواتە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە بریتییە لە کۆمەڵەی بەهایەکانی x کەپاسادانی $x\leq -3$ یان $x\geq 5$



هەوڵبدە لاسەنگەی $x^2-8x+12\geq 0$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

نـــــموونـــــه 2

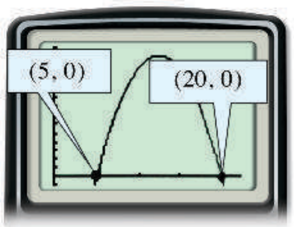
بەگەڕانەوە بۆ سەرەتایی وانەکە، پێویستە چۆن سۆزان نرخی کراسی **p** دیاریبکات بۆ دەستکەوتنی قازانج؟

شیکار



هاوکێشە دووجاکە شیکاربکە $-25p^2+625p-2500=0$

بەبەکار هێنانی یاسا. $\Delta=625^2-4\times(-25)\times(-2500)=140625$



بری جیاکەرەوەی هاوکێشەکە:

هەردوو ڕەگەکە بریتین لە

$$p=\frac{-625\pm 375}{-50}=\begin{cases}5\\20\end{cases}$$

لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە $y=-25x^2+625x-2500$ دەردەکەوێت سۆزان قازانج دەکات ئەگەر نرخی کراسێك لە نێوان 5 و 20 هەزار دینارد‌ا دابنێت.

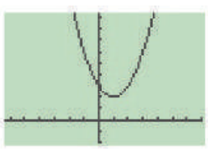
خاڵی چاودێری ✓ ئایا سۆزان قازانج دەکات ئەگەر نرخی کراسێك بە 20 هەزار دینار دابنێ؟

نـــــموونـــــه 3

لاسەنگەی $x^2-2x+3\leq 0$ شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

شیکار





هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشە دووجای پەیوەست بە لاسەنگەکەوە دەری‌دەخات کە بەهای نەخشەکە موجەبە، بەهای گۆڕاوی x هەرچەندێك بێت.

واتە هیچ بەهایەك بۆ گۆڕانی x نییە پاسادانی لاسەنگەکە بکات. دەتوانین بڵێن کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەکە، کۆمەڵەی بەتاڵە.

راهێنــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕوونیبکەوە چۆن لاسەنگەی $x^2-2x-8\geq 0$ شیکاردەکەیت.
2. ڕوونیبکەوە چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ شیکاری لاسەنگەی $x^2-2x-8>0$ یارمەتیت دەدات.
3. ڕوونیبکەوە چۆن شیکاری لاسەنگەی $(x-2)^2<0$ بە بێ بەکارهێنانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دەدۆزیتەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4. لاسەنگەی $x^2-7x+12\geq 0$ شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.
5. بەها تەواوەکانی x کامانەن؟ کە پاسادانی $-2x^2+25x-72>0$ دەکەن.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

6. $x^2-1\geq 0$
7. $-x^2+5x-6>0$
8. $x^2-8x+12\leq 0$
9. $x^2-4x-5<0$
10. $x^2-7x+10\leq 0$
11. $50-15x>-x^2$
12. $x^2\leq \frac{3}{4}+x$
13. $x^2-x-12\leq 0$
14. $-x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{9}>0$
15. $x^2-4x-12>0$
16. $x^2-2x-99>0$
17. $x^2+x-6\leq 0$
18. $x^2-x+20<0$
19. $x^2\leq 7x-6$
20. $x^2+35>-12x$
21. $10-x^2\geq 9x$
22. $x^2+10x+25>0$
23. $x^2+3x-18>0$
24. $x^2-2>x$
25. $x^2+6x\geq 7$
26. $15-8x\leq -x^2$
27. $-x^2+3x+6<0$
28. $4x-1>8-x^2$
29. $x^2+5x-7<4x$

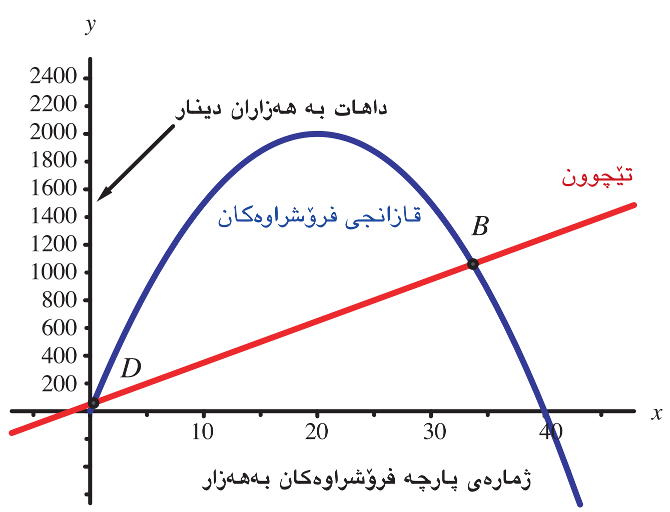
بەرەنگاربوونەوە

30. نەخشەیەکی دووجا بنووسە کە پاسادانی $f(x)\geq 0$ بکات بۆ بەهاکانی x کە دەکەوێتە نێوان 2 و 6 بە بەهای هەردوو ژمارەکەشەوە.
31. لاسەنگەیەکی دووجا بنووسە کاتێك کۆمەڵەی شیکارەکەی ئەو بەهایانەی x بن کە پاسادانی $x<3$ یان $x>7$ دەکەن.

32 **وەرزش** لەسەرەتای دەست پێکردن لە یاری سەبەتەدا، ناوبژیوان تۆپەکە بە شێوەیەکی ستوونی هەڵدەدا. نەخشەی دووجای $h(t) = -16t^2 + 24t + 5$ نموونەیەکی بیرکارییە بۆ بەرزی تۆپەکە بە پێی کات، کاتێك h بەرزی تۆپەکە و t کات بنوێنێت، دیاریبکە لەکام دوو چرکەدا بەرزی تۆپەکە لە 9m بەرزتر دەبێت؟

33 **بازرگانی** نەخشەی $y = -0.1x^2 + 8x - 50$ نموونەیەکی بیرکاریانەیە کە قازانج لە فرۆشتنی x یەکە لەبەرهەمێکی پیشەسازی دەنوێنێت. کەمترین یەکەی فرۆشراو چەند بێت بۆ ئەوەی فرۆشیارەکە قازانج بکات؟

34 **بازرگانی** یەکێك لە کۆمپانیاکان لێکۆڵینەوەیەکی ئەنجامدا بۆ تێچوونی بەرهەم و فرۆشتنی یەکێك لە بەرهەمەکانی، گەیشتە ئەوەی کە نەخشەی $C(x) = 50 + 30x$ نموونەیەکی بۆ تیچوونی بەرهەم هێنان ونەخشەی $R(x) = 5x(40 - x)$ نموونەیەکی بۆ داهاتی فرۆشتن، کاتێك x ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان بێت بە هەزاران. بەڵام قازانجی بە دەستهاتوو ئەم نەخشەیە دەینوێنێت $P(x) = R(x) - C(x)$ ئەم هێڵکاریە بەکاربهێنە بۆ وەڵام دانەوەی پرسیارەکان.



أ ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان لە نێوان کام دوو بەهایەدا دەبن بۆ دەست کەوتنی قازانج.

ب ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان چەند دەبن بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج بکرێت.

ج ئایا گەورەترین تێچوون هەیە کە ناکرێت لێی تێپەربێت؟ ڕوونیبکەوە.

د هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی قازانج بکێشە.

هـ لەسەرەتای کام هێندەی فرۆشراو کۆمپانیاکە دەست بە زەرەرکردن دەکات.

ڕوانینێك بۆ دواوە

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم پەیوەندیانە بکێشە، ئایا پەیوەندییەکە نەخشە دەنوێنین یان نا

35 $y = |x|$

36 $x = |y|$

37 $x = y^2$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە بە هۆی نووسینی ڕەگە کە بە تەواوی.

38 $-2x^2 = -16$

39 $-3x^2 + 15 = -6$

40 $32 = 2x^2 - 4$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

41 بەهای b دیاریبکە بە جۆرێك هێڵکاری نەخشەی $y = x^3 - 2x^2 + 3x + b$ بەخاڵی $(1,9)$ دابڕوات.
پاسادانی وەڵامەکەت بکە بە لە جیاتیدانانی بەهای b بە بەها دیاریکراوەکە. هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

جیاوازی چییە؟

زۆر لەیەك بەدوایەكە ژمارەییەكان لە نەخشەیەك پێك دێت كە پێناسەكراون. لەیەك بە دوایەكی دووجای ژمارەكان ووردببەرەوە.

n	1	2	3	4	5	6	7	. . .	n
$S(n)$	1	4	9	16	25	36	49	. . .	n^2

ڕادە یەكەمەكان لەم یەك لە دوای یەكەدا بریتین لە 1^2، 2^2، 3^2، 4^2، 5^2، 6^2، 7^2 لە ڕادە یەكەمەكانی ئەم یەك بە دوای یەكە دەبینین ئەو ڕادەیەی ژمارەكەی n بێت بریتییە لە n^2، لەوەشەوە دەتوانین بڵێین نەخشەی $f(x)=x^2$ ئەو یەك بەدوای یەكە دروست دەكات كە ڕادە نونییەكەی $f(n)=n^2$ ئەویش بە لەجیاتیدانانی ژمارەی سروشتی n بە گۆڕاوی x.

چۆن نەخشەك پێكدەهێنی لەیەك بەدواییەكێكەوە كە ڕادە یەكەمەكانی زانراوبێت؟ یەكی لەو ڕێگایانە، ڕێگای كۆتاییە جیاوازییەكانە. دەتوانیت ئەم ڕێگایە بەكاربێنیت كاتێ تێبینی دەكەیت كە یەك لە دوای یەكەكە بەرەو جیاوازییەكی نەگۆڕ دەچێت لە ئاستێكی دیاریكراودا. لەم یەك لە دواییەكە ووردببەوە

n	1		2		3		4
$f(n)$	0		5		12		21
جیاوازی ئاستی یەكەم		5		7		9	
جیاوازی ئاستی دووەم			2		2		

سەرنجی ئەوە بدە كە جیاوازییەكان لە ئاستی دووەمدا یەكسانن.ئەمەش وامان لێدەكات لەم بارەدا بە داوی نەخشەیەكی دووجادا بگەڕێین بۆ پێكهێنانی یەك لەدوای یەكەكە.

بنووسە وهەوڵبدە بەهای هاوكۆلكەكان بە بەكارهێنانی بەهاكانی n وڕادەكانی بەرامبەری بدۆزیتەوە.

$$f(n)=an^2+bn+c$$
$$f(1)=a(1)^2+b(1)+c=a+b+c$$
$$f(2)=a(2)^2+b(2)+c=4a+2b+c$$
$$f(3)=a(3)^2+b(3)+c=9a+3b+c$$
$$f(4)=a(4)^2+b(4)+c=16a+4b+c$$

n	1		2		3		4
$f(n)$	$a+b+c$		$4a+2b+c$		$9a+3b+c$		$16a+4b+c$
		$3a+b$		$5a+b$		$7a+b$	
			$2a$		$2a$		

بەراورد كردنی ئەم خشتەیە لەگەڵ خشتەی جیاوازییەكان ڕێگەدەدات بە نووسینی ئەو هاوكێشە كە هاوكۆلكەی نەخشە دووجاكان پاسادانی دەكەن.

$a+b+c=0$ $\quad$ $3a+b=5$ $\quad$ $2a=2$

سیستەمی ئەو هاوکێشانە بەدەستت هێناوە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە.

- $2a = 2$ کەواتە $a = 1$
- $3a + b = 5$ کەواتە $b = 2$
  $3 + b = 5$
- $a + b + c = 0$ کەواتە $c = -3$
  $1 + 2 + c = 0$

پوختەی ئەمانەی پێشوو نەخشەی $f(n) = n^2 + 2n - 3$ پێکدێنیت کەیەك لەدوای یەکە دراوەکەی لێوە دروست دەبێت.



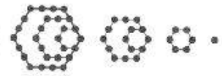
لەئەنجامەکە دڵنیا بە بە لەجیاتی دانانی بەهای n بە بەهاکانی 5 وە 6 وە 7 ئەگەر بزانیت یەك لە دوای یەکەکە بریتیە لە $0, 12, 21, 32, 45, 60, ...$

چالاکی 1 **دیاریکردنی نەخشە دووجاکان**

چەند کۆمەڵەیەك لە دوو خوێندکار یان زیاتر پێکبهێنە وسەرۆکێك بۆ هەر یەکێکیان دابنێ.سەرۆکەکە دوور لە هاورێکانی، نەخشەیەکی دووجا هەڵدەبژێرێت کە هاوکۆلکەکانی ژمارەی تەواو بن و بەکاری دەهێنێت بۆ دروستکردنی یەك بەدوای یەکێکی 5 ژمارەیی. سەرۆکەکە یەك بەدوای یەکەکە پیشاندانی ئەندامانی کۆمەڵەکە دەدات، داوای دۆزینەوەی نەخشەکەیان لێدەکات.

چالاکی 2 **دیاریکردنی هاوکێشەی دووجا بۆ ژمارە شەشیەکان**

ئەندازیاریەکی تەلار سازی دیزاینی تەلارێکی واکێشاوە وەك لە وێنەکەدا دیارە ئەگەر سەیری تەلارەکە بکەیت شەش لارێکەکانی تیا دەبینێت کە هەر یەکێکیان لەناو ئەوی تریاندایە ئەم دیمەنەش وەك یەك بە دوایەکێك لە ژمارەکاندا دەنوێنێت. ئەگەر n ژمارەی خاڵەکان بێت لە هەر لایەکی شەش لاکاندا، ئەوا ژمارەکانی یەکبەدوای یەکەکە ژمارەی خاڵەکان دەنوێنێت لە هەر شێوەیەك لە شێوە ئەندزەییەکان.



چوار ژمارەی یەکەم لەم یەك بەدوایەکە بنووسە ورێگای کۆتایی جیاوازەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك کە لە یەك بەدوایەکەکە پەیدا دەبێت.

3

پێداچوونەوەی بەش

ئەم نەخشانە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە و دیاریکە کە نەخشەی دووجان.

1 $f(x) = -(x+1)(x-4)$

2 $f(x) = 4(2x-1)(3x+2)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە و پۆتانی سەری نەخشەکە بەنزیکراوەیی دابنێ:

3 $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

4 $f(x) = 5x^2 - x - 12$

ئایا ئەم برگە هاوتایانە بۆ سەرەوە یان خوارەوە کراون؟ ئایا نەخشەکە بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە؟

5 $f(x) = -x^2 - x - 1$

6 $f(x) = (x-3)(x+2)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە وشیکاری تەواو بنووسە کە نزیکرابێتەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد.

7 $x^2 = 8$

8 $3x^2 = 60$

9 $x^2 - 3 = 46$

10 $x^2 + 4 = 9$

11 $(x-3)^2 = 64$

12 $(x-5)^2 = 48$

13 $7(x+1)^2 = 54$

14 $6(x+2)^2 = 30$

ئەم هاوکێشانە بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

15 $x^2 - 10x + 24 = 0$

16 $2x^2 - 3x - 2 = 0$

17 $6t^2 + 11t - 10 = 0$

ئەم هاوکێشانە بە تەواوکردنی دووجا شیکاربکە.

18 $x^2 - 10x + 21 = 0$

19 $x^2 - 7x - 8 = 0$

20 $4x^2 + 4 = 17x$

ئەم نەخشانە بە شێوەی پێوانەیی بنووسە وپۆتانی سەرەکانی بنووسە.

21 $f(x) = 2x^2 - 16x + 33$

22 $f(x) = -3x^2 - 6x - 7$

ئەم هاوکێشانە بە ڕێگای یاسا شیکاربکە.

23 $x^2 - 7x = -10$

24 $6x = 2 - 5x^2$

25 $x^2 = 1 - x$

26 $2x + 1 = 2x^2$

27 $x^2 + 6x = -8$

28 $11x = 5x^2 - 3$

29 $x = 6x^2 - 3$

30 $3 = x^2 + 5x$

پۆتانی سەری ئەم برگانە دیاریکە.

31 $f(x) = x^2 + 7x + 6$

32 $f(x) = x^2 - x - 12$

33 $f(x) = x^2 + 2x - 3$

34 $f(x) = x^2 + 12x + 5$

ژمارەی ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیارییکە بە بەکارهێنانی جیاکەرەوە

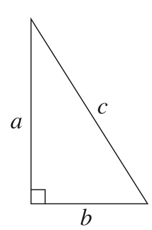
35 $4x^2 - 20x = -25$

36 $9x^2 + 12x = -2$

37 $x^2 = 21x - 110$

38 $-x^2 + 6x = 10$

درێژی لا نەزانراوەکە لەم سێگۆشە وەستاوە بدۆزەوە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.



39 $b = 5;\ a = 4$

40 $a = 1;\ c = 4$

41 $c = 12;\ b = 7$

42 $c = 15;\ a = 12$

43 $b = 5;\ c = 25$

44 $a = 6;\ b = 6$

45 $c = 5.8;\ b = 3.2$

3

تاقیکردنەوەی بەش

ڕێسای ئەم نەخشانە بەشێوە گشتی $f(x)=ax^2+bx+c$ بنووسە وهاكۆلكەكانی دیاریبكە. ڕووی كرانەوەی برگە هاوتاكە دیاریبكە وئایا سەرەكانی گەورەترین یان بچووكترین بەهای هەیە.

1 $f(x)=(x+3)(x-4)$

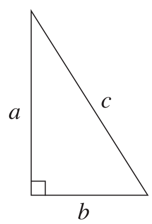
2 $f(x)=-5(x+1)(x-7)$

3 $f(x)=-2(x+3)(3x)$

هەر یەك لەم هاوكێشانە شیكاربكە بە نووسینی ڕەگە تەواوەكەی، پاشان نزیكیبكەوە بۆ نزیكترین بەش لە سەد.

4 $3x^2=81$ **5** $(x-7)^2=12$

درێژی لای سێیەمی ئەم سێگۆشە گۆشە وەستاوە بدۆزەوە بۆ نزیكترین دە نزیكبكەوە.



6 $a=7$ ؛ $b=9$

7 $a=2$ ؛ $c=4$

8 $b=8$ ؛ $c=9.2$

شیتەڵكردن ولێكدانی سفری بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی سفری ئەم نەخشە دووجایانە.

9 $f(x)=-x^2-9x$

10 $f(x)=4x^2-64$

11 $f(x)=4x^2-4x+1$

12 $f(x)=x^2-3x-10$

13 **بیردۆزی ژمارەكان**: ئەگەر ئەنجامی لێكدانی دوو ژمارە 90 بێت ژمارەیەكیان 3 ی زیاتر بێت لە دوو ئەوەندی ئەوی تریان . هاوكێشەیەكی دووجا بنووسە كە ڕەگەكانی ئەم دوو ژمارەیە بن، پاشان بە شیتەڵكردن و بە بەكارهێنانی لێكدانی سفری هاوكێشەكە شیكار بكە.

ئەم هاوكێشە دووجایانە بە تەواوكردنی دووجا شیكاربكە

14 $x^2-8x+4=0$

15 $2x^2-11x+5=0$

16 **ئەندازە**: ئەگەر ڕووبەری سێگۆشەیەك 30 مەتر دووجا بێت، وبەرزیەكەی 4 مەتر لە درێژی بنكەكەی كەمتر بێت.درێژی بنكەو بەرزییەكەی بدۆزەوە.

ئەم هاوكێشە دووجایانە بە یاسا شیكاربكە.

17 $x^2-2x-5=0$

18 $-3x^2+15=12x$

هاوكێشەی تەوەرەی هاوجێبوون و پۆتانی سەری برگە هاوتایەكان بنووسە.

19 $y=x^2-7x+10$

20 $y=3x^2+18x+6$

بڕی جیاكەرەوە بەكاربهێنە بۆ دیاریكردنی ژمارەی ڕەگەكانی ئەم هاوكێشە دووجایانە.

21 $x^2-8x+4=0$

22 $-3x^2=5+3x$

23 $4x^2=27$

ئەم لاسەنگە دووجایانە شیكاربكە وشیكارەكە لەسەر تەوەرەی ژمارەكان بنوێنە.

24 $x^2-x-12>0$

25 $-2x^2+4x+6\geq 0$

26 $2\leq x^2+4x-3$

27 $1>-x^2-2x-6$

3 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی $5x^2+2x+1=0$ لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیەکاندا چەندن؟

أ 2 ب 0

ج 1 د جگە لەمانە

2 کام لەم جووتە ڕێکخراوانە شیکاری سیستمی ئەم هاوکێشەهێڵییە دەکات

$$\begin{cases}5x+y=11\\3x+2y=8\end{cases}$$

أ $(2, 1)$ ب $(3, 2)$

ج $(-1, 2)$ د $(5, 6)$

3 بڕی $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-3}y^2}$ کورت بکەرەوە.

4 شیتەڵکردنی ڕادەداری x^2+5x+6 بریتییە لە

أ $(x+1)(x+6)$

ب $(x-2)(x-3)$

ج $(x-1)(x-6)$

د $(x+2)(x+3)$

5 کام لەو ووشانە باسی شیکاری سیستمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}2x+5y=3\\4x+10y=6\end{cases}$ دەکات.

أ ئەستەمە ب سنووردراو نییە

ج سنووردراوە د هیچ لەمانە

6 بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $-\frac{1}{3}x\le 6$ شیکاربکە.

7 سیستمی هاوکێشەی هێڵی $\begin{cases}3x-2y=2\\x+y=4\end{cases}$ شیکاربکە.

8 هاوکێشەی $x^2+3x+1=0$ شیکار بکە.

9 ڕێسایەکی نەخشە بنووسە هێلکاری ڕوونکردنەوەکەت دەست دەکەوێت لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $f(x)=x^2$ کە بە شێوەیەکی ئاسۆیی 3 یەکە بەرەو لای چەپ بکێشەوە.

10 بەهای نەخشەی $f(x)=11-\frac{1}{2}x$ چەندە کاتێك $x=-6$ ؟

11 **کیمیا** زانایەك دەیەوێت 60 مل لە گیراوەیەك ئامادە بکات، کە ڕێژەی سوێرییەکەی تیایدا 5% بێت بە بەکارهێنانی دوو گیراوە کە ڕێژەی سوێری لەیەکەمیاندا 2% و لە دوومیاندا 12% یە پێویستە چەند لەهەریەکێك لەو دوو گیراوەیە بەکاربێت؟

12 بەهای $8^{\frac{2}{3}}$ چەندە؟

13 بڕی $\frac{(3^2-7)^2}{3^{(2^2-1)}}$ کورتبکەوە.

14 بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی $x^2+4x+1=0$ هەژماربکە.

15 جۆری ئەوپەڕی بەهای نەخشەی $f(x)=-x^2+2x+1$ دیاری بکە (گەورەترین یان بچووکترینە) پاشان بەهاکەی بدۆزەوە.

16 **فیزیا** دیلان تۆپێکی لەبەرزی 3 م بەردایەوە بە نزیکەیی بۆ نزیکترین دەیەك لە چرکەیەکدا کاتی پێویستە چەندە؟ بۆ ئەوەی تۆپەکە بگاتە سەر زەوی. نەخشەی $h(t)=-5t^2+3$ بەکاربێنە کاتێك h بەرزی بێت بە مەتر و t کات بێت بە چرکە.

17 **بازرگانی** کۆمپانیایەکی کوردستان جۆرێکی تایبەت لە بزمێر دەفرۆشێت نەخشەی :

$$P(x)=-x^2+90x+497975$$

کاتێك کە x نرخی بزمێرە و P قازانجی کۆمپانیاکە بێت. ئەو نرخە چەندە کە زۆرترین قازانج بۆ کۆمپانیاکە دەستەبەردەکات وەڵامەکەت بە نزیککراوەی بە دینار بنووسە.

بەشی چوارەم

بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان

Polynomial Functions and Expressions

1. ڕادەدارەکان.
2. نەخشە ڕادەدارەکان.
3. لێکدان و دابەشکردنی ڕادەدارەکان.
4. هاوکێشە و لاسەنگە ڕادەدارەکان.

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی

4

بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان

Polynomial Functions and Expressions



زۆرجار ڕادەدارەکان بەکاردەهێنین بۆ هەژمێرکردنی یاسای ڕووبەر و قەبارەکان، بەکاریش دێت بۆ ئەو پێداویستییانەی کە پەیوەندیان بە هێزی کێشکردن و بەکاربەرەوە هەیە. هەروەها بەکاریش دێت لە زۆر پێداویستی تری ژیانی ڕۆژانەمان. نموونەش بۆ ئەوە بەکارهێنانی لە هەژمێرکردنی قەبارەی ئەو تەلارە ناڕێکانەی کە لەوێنەکەوە دەیبینیت.

لەم بەشەدا ئەوە فێردەبیت کەچۆن کردارەکان لەسەر نەخشە ئەنجام دەدرێت و چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەییەکەی دەکێشین و ڕەگەکانی دیاریدەکەین.

وانەکان





دەربارەی پرۆژەی بەش

لەم بەشەدا نەخشەی ڕادەدار بەکاردێنین بۆ پێکهێنانی چەند نموونەیەك بۆ بارەکانی ژیانی ڕۆژانە. پەیوەندییەکەش کاتێك نموونەیی دەبێت کە وەڵامی تەواوی پێداویستییەکانمان بداتەوە. لەکاتی ئیشکردنت لەم بەشە، ئەو شێوە دەفرانە دەخەمڵێنیت بە بەکارهێنانی نەخشەی ڕادەدار کە پێکیدێنیت لەپەیوەندی نێوان قەبارەی ئەو ئاوەی لە دەفرەکەدایە لەگەڵ بەرزییەکەی.

دوای تەواوبوونت لە بەشەکە توانای ئەمانەی خوارەوەت دەبێت:

- کۆکردنەوە وڕێکخستنی پێدراوەکان.
- نەخشەیەکی ڕادەدار پێکبێنیت کە نزیك بێت لە پەیوەندی نێوان پێدراوەکان.
- دڵنیا دەبیت لە ڕاستی نموونەکە.



وانەی 1

ڕادەدارەکان Polynomials



بۆچی

ڕادەدارەکان بەکاردێت بۆ دروست کردنی زۆر لە نموونەی پێداویستییەکانی ژیانی ڕۆژانەمان.

ئامانجەکان

- ڕادەدارەکان دەناسێت وپلە و هاکۆلکەکانیان جیادەکاتەوە.
- بەهای ڕادەدارەکان بە لەجیاتیدانان دەدۆزێتەوە.
- ڕادەدارەکان کۆدەکاتەوە ولێکیان دەردەکات.

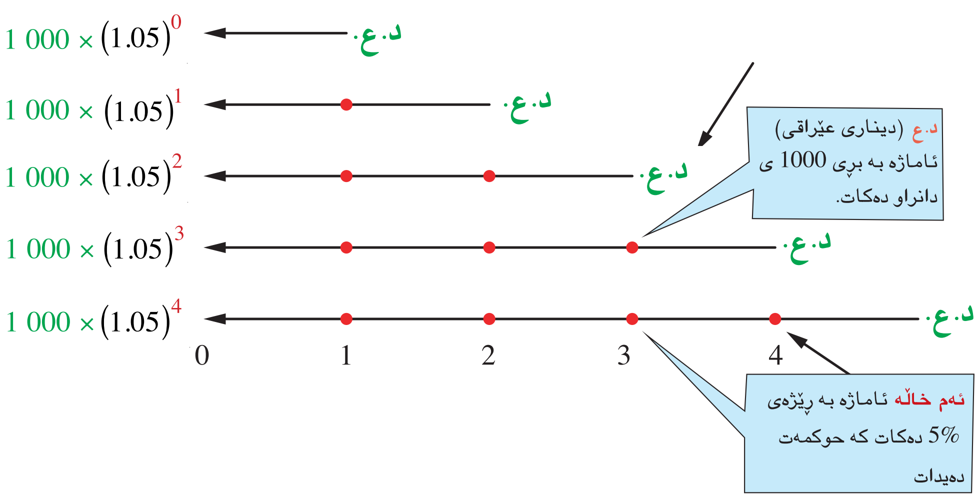
جێبە جێکردنەکان

پاشەکەوت

لە یەکێك لە وڵاتەکان حکومەت سندوقێکی تایبەتی داناوە کە هانی کرێکاران دەدات پارە دابنێن و بۆیان کۆبێتەوە، تاوەکو لە پیریدا کەڵکی لێوەربگرن. هەرکرێکارێك لە سەرەتای هەموو ساڵێکدا 1000 دینار دادەنێت وحکومەتیش 5% ئەو پارەیە لە سندوقەکەدا بۆ هەر کرێکارێك دادەنێت کە لە ساڵی سفرەوە دەست پێدەکات.

هێڵکاری خوارەوە زیادبوونی پارەی دانراوی ڕزگار دەنوێنێت لەماوەی 4 ساڵدا.

خشتەی خوارەوە پارەی دانراوی ڕزگار لە کۆتایی هەر ساڵێکدا دیاریدەکات.



10 000

کۆتایی ساڵ	پارەی دانراو
سفر	1000
1	$1000 + 1000(1.05)$
2	$1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2$
3	$1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^3$
4	$1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^3 + 1000(1.05)^4$

ئەگەر حکومەت ڕێژەی 6% یان 7% یان 8% لە جیاتی 5% دابنێت تەنها ئەوەت لەسەرە کە ژمارەی 1.05 بگۆڕێت بۆ ژمارەی 1.06 یان 1.07 یان 1.08 .

ئەگەر هێمای x دابنێی بۆ ئەو ژمارە گۆڕاوە، دەتوانیت پارەی دانراوی ڕزگار بەم شێوەیە بنوسیت:

$$1000 + 1000x + 1000x^2 + 1000x^3 + 1000x^4$$

بەم جۆرە برانەش پێیان دەوترێت بڕی زۆر ڕادەدار **Polynomial Expression** کە بریتییە لە کۆی کۆمەڵێك بڕی سادەتر کە پێی دەوترێت ڕادە

ڕادە **Term** بریتییە لە هێندێکی جەبری پێکدێت لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەك لە گۆڕاوێك یان زیاتر وەك: بڕی $3x^2b$ ،لەوانەیە تەنها یەك گۆڕاوی تێدابێت. وەك $5x^2$ یان تەنها ژمارە بێت وەك ژمارە 10 لەم کاتەدا پێی دەوترێت ڕادەی **نەگۆڕ Constant Term** ژمارە لە ڕادەی جەبری پێی دەوترێت **هاوکۆلکە** یان بەشە **نەگۆڕەکە Constant Part** بەڵام بەبەشەکەی تر دەوترێت **گۆڕاو Variable Part** . بۆ نموونە:

- هاوکۆلکەی x بریتییە لە 1 و بەشە گۆڕاوەکەی x .
- هاوکۆلکەی $-2xb$ بریتییە لە -2 و بەشە گۆڕاوەکەی xb .
- هاوکۆلکەی $\frac{-b^3x^2}{2}$ بریتییە لە $-\frac{1}{2}$ و بەشە گۆڕاوەکەی b^3x^2 .
- هاوکۆلکەی $-bc$ بریتییە لە -1 و بەشە گۆڕاوەکەی bc .

پلەی ڕادەکە Degree of Term بریتییە لە توانی گۆڕاوەکە ئەگەر تاکانە بێت. بەڵام ئەگەر لە گۆڕاوێك زیاتر بێت بریتییە لە کۆی توانی گۆڕاوەکان، بۆ نموونە پلەی ڕادەی $\frac{-b^3x^2}{2}$ بریتییە لە 5 .

ڕادەدار **Polynomial** بریتییە لە کۆی چەند ڕادەیەك، لەم وانەیەدا فێری ڕادەداری یەك گۆڕاو دەبێت. هەندێك ڕادەدار بەناوی تایبەتی دەناسرێنەوە. ئەو ڕادەدارەی لە دوو ڕادە پێکدێت پێی دەوترێت ڕادەداری **دوانی Bionomial** و ئەوەی لە سێ ڕادە پێکدێت پێی دەوترێت ڕادەداری **سیانی Trinomial** . **پلەی ڕادەدار Degree of Polynomial** بریتییە لە گەورەترین توانی ڕادەکانی کە ئەو ڕادەدارە پێك دەهێنن دەتوانین ڕادەدارەکان بە پێی پلەکانیان پۆلین بکەین وەك لەم خشتەیەدا ڕووندەبێتەوە.

پۆلێنکردنی ڕادەدارەکان بە پێی پلەکانیان		
پلە	**ناوەکەی**	**نموونە**
سفر	نەگۆڕە	3
1	هێڵییە	$5x+4$
2	دووجاییە	$-x^2+5x-11$
3	سێجاییە	$4x^3+x^2+2x+3$

نموونە 1

پلەی ئەم ڕادەدارانە چەندە؟

أ $4x^2 - 3x + 6x^5$

ب $-2x^3 + 3x^4 + 4x^3 + 5$

أ پلەی هەر ڕادەیەك لە ڕادەكانی ڕادەدارەكە یەك لەدوای یەك بریتییە لە 2 و 1 و 5 لەوەشەوە پلەی ڕادەدارەكە (5)ە.

ب پلەی هەر ڕادەیەك لە ڕادەكانی ڕادە دارەكە یەك لەدوای یەك بریتیە لە 3 و 4 و 3 و سفر لەوەشەوە پلەی ڕادەدارەكە (4)ە.

هەوڵبدە پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبكە.

أ $4x^2 + 4 - 8x - 4x^3$

ب $3x^3 + 2x^3 - 6x^5$

هەژماركردنی بەهای ڕادەدارەكان Evaluating Polynomials

لە نموونەی(2) وە بۆت دەردەكەوێت چۆن ڕادەدار لە ژیانی ڕۆژانەدا بەكاردێت.

نموونە 2

پارەی دانراوی ڕزگار لە كۆتایی ساڵی چوارەمدا چەندە؟ ئەگەر حكومەت ڕێژەی **6%** ی دانا لە جیاتی **5%** ؟

شیكاری

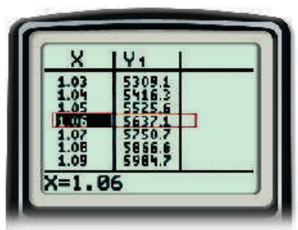
لە جیاتیدانان بەكاربێنە

$$y = 1000 + 1000x + 1000x^2 + 1000x^3 + 1000x^4$$

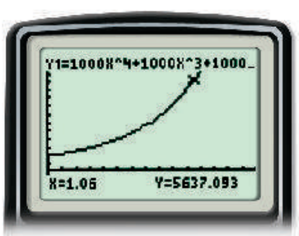
$$1000 + 1000(1.06) + 1000(1.06)^2 + 1000(1.06)^3 + 1000(1.06)^4 = 5637.09$$

ڕێگای دووەم : بە بەكارهێنانی بژمێرەی ڕونكردنەوەیی (ئەگەر هەبێت).

نەخشەی $y = 1000 + 1000x + 1000x^2 + 1000x^3 + 1000x^4$ لە ناو بژمێرەكەدا بنووسە بۆ بەدەستهێنانی خشتەی بەهاكان یان وێنەی ڕونكردنەوەیی نەخشەكە.



بەهای y بریتییە لە 5637.07 بەنزیكەیی



هەوڵبدە بەهای ڕادەداری $3x^4 + 2x^2 + 2x - 5$ هەژماربكە كاتێك $x = 1.5$

كۆكردنەوە و لێكدەركردنی ڕادەدارەكان Adding and Subtracting Polynomials

بۆ كۆكردنەوە و لێكدەركردنی ڕادەدارەكان تەنها هاوكۆلكەی ڕادە لە یەكچووەكان كۆ دەكەرێتەوە یان لەیەكیان دەردەكەین. ڕادە لە یەكچووەكان ئەوانەن كە توانی گۆڕاوەكانیان یەكسانن. پاش كرداری كورت كردنەوە ڕادەدارەكە بە شێوەی گشتی بنووسە.

شێوەی گشتی **Standard Form** بریتییە لە ڕیزكردنی ڕادەكان لە توانی گەورە بۆ بچووك.

نموونە 3

$(-2x^2-3x^3+5x+4)+(-2x^3+7x-6)$ کۆبکەوە.

شیکار

$$(-2x^2-3x^3+5x+4)+(-2x^3+7x-6)=(-3x^3-2x^3)+(-2x^2)+(5x+7x)+(4-6)$$
$$=-5x^3-2x^2+12x-2$$

هەوڵبدە $(2x^4+4x^3+5x-2)+(-2x^4-7x^2+8x-10)$ کۆبکەرەوە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ڕادەداری p بدۆزەوە کە پاسەدانی $(2x^2-3x+5)+p=0$ دەکات.

نموونە 4

$(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8)$ لێدەربکە.

شیکار

$$(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8)=(-6x^3-3x^3)+(-6x^2+5x^2)+(7x+2x)+(-1-8)$$
$$=-9x^3-x^2+9x-9$$

هەوڵبدە $(3x^3-12x^2+5x+1)-(-x^2+5x+8)$ لێدەربکە.

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. بە دەربڕینی خۆت ڕادەدار پێناسەبکە.
2. چۆن پلەی ڕادەدارێك دیاریدەکەیت، ئەوە ڕوونبکەرەوە.
3. ڕوونیبکەوە چۆن دوو ڕادەدار کۆدەکەیتەوە و لەیەکتریان دەردەکەیت.
4. ڕوونیبکەوە چۆن هەژمێری بەهای ڕادەدار دەکەیت ئەگەر بەهای گۆڕاوەکەیت زانی.
5. ڕوونیبکەوە چۆن ڕادەدار بە شێوەی گشتی دەنووسیت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

پلەی هەر ڕادەدارێك چەندە؟

6. $3x^3-12x^2-5x-12x^5+1$
7. $3x^{10}+3x^2+2$
8. بەهای ڕادەداری x^3+2x^2-x+1 هەژماربکە کاتێك $x=2$.
9. $(2x^3+3x^2-x+2)+(-3x^2+4x+5)$ کۆبکەوە.
10. $(6x^3-5x^2+14x+3)-(3x^3-2x^2+7x-2)$ لێدەربکە.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم ڕادەدارانە بە شێوەی گشتی بنووسە.

11 $5x^3+4x+2x^2+1$

12 $4x^4+x^2+x^3+x+1$

13 $2.7x^3+3.3x^8+4.1x^2$

14 $\frac{13}{25}x^4+\frac{5}{7}x^3+\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}$

ئایا ئەم برانە ڕادەدار دەنوێنن؟ ئەگەر وەڵامەکە بەڵێیە پلەی ڕادەدارەکە دیاریبکە.

15 $7x^5+3x^3-2x+4$

16 $-4x^2+3x^3-5x^6+4$

17 x^3+2^x-x-7

18 $4x^2+5x^2-x+1$

19 $0.35x^4+2x^2+3.8x$

20 $7.81x^4+8.9x^3+2.5x^2$

21 $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$

22 $\frac{8}{x^3}-\frac{7}{x^2}+x$

23 $\frac{5}{7}x^6+\frac{2}{3}x^4+5$

24 $\frac{x^5}{7}-\frac{x^3}{3}$

25 $\sqrt{x}-1$

26 $7x\sqrt{x}+4$

هەژمێری بەهای ڕادەدارەکە بکە کاتێك x بەها پێدراوەکە وەربگرێت.

27 $x=-3$ ؛ x^3+x^2+1

28 $x=-2$ ؛ x^4+2x^3+2

29 $x=4$ ؛ $-2x^3-3x+2$

30 $x=3$ ؛ $-4x^3+1+x$

31 $x=5$ ؛ $3x^3+x^2+2x+4$

32 $x=6$ ؛ $5x^3+2x^2-5x+2$

33 $x=2.5$ ؛ $1+x^2-3x^3$

34 $x=3.8$ ؛ $5x^3+4x+2x^2+1$

35 $x=2$ ؛ $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$

36 $x=10$ ؛ $\frac{3}{10}x^3+\frac{7}{10}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{9}{10}$

ئەمانە کۆبکەوە یان لەیەکتریان دەربکە، پاشان ئەنجامەکەت لەسەر شێوەی گشتی بنووسە وپلەکەی دیاریبکە.

37 $(x^3+x^2+x+1)+(2x^3+3x^2+x+3)$

38 $(x^5+x^3+x)+(x^4+x^2+1)$

39 $(1-5x+x^3)-(2x^4+5x^3-10x^2)$

40 $(5x^3+3x^2+8x+2)-(2x^2+4x+7)$

41 $(2x^2-5x+3)+(4x^3+6x^2-2x+5)$

42 $(x^2-5x^3+7)-(6x+x^3+3x^2)$

43 $(x^4+5x^2+x)-(x^4+2x^3+x-4)$

44 $(8x^2+x^3+1-3x)+(2x^3+11x^4)$

45 $(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3+1)+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x)$

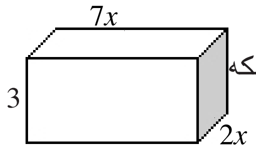
46 $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)+(4.9x^3+2.5x^4)$

بەهای a, b, c, d دیاریبکە تا یەکسانییەکە ڕاست بێت.

47 $(11x^3+ax^2-x+b)-(4x^3-3ax+5)=cx^3-2x^2+dx-1$

48 (ax^3+2x^2+cx+1) بە $(5x^3-3)$ زیاترە لە $(3x^3+bx^2+d-7x)$.

بەستنەوە



49 ئەندازە بەپێی x بڕی جەبری بۆ ڕووبەری گشتی پاکەتێك هەژماربکە کە درێژی بنکەکەی $7x$ وپانییەکەی $2x$ و بەرزیەکەی 3 بێت.

جێبەجێکردنەکان

50 پیشە سازی بەزۆری ڕادەدارەکان بەکاردەهێنرێت بۆ دەربڕینی تێچوونی بەرهەمێك لە بەرهەمەکانی پیشەسازی.10^{11}
ئەگەر تێچووی بەرهەمی x پارچە لە $C(x)=x^3-15x+15$ بێت، تێچوونی 10 000 پارچە چەندە؟

51 پیشە سازی ئەگەر تێچوونی بەرهەمی x پارچە $c(x)=3x^3-18x+45$ بێت تێچوونی 20 000 پارچە چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە شیتەڵبکە.

52 $6(x^2-4x)$

53 $8(x^2+6x)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

54 $\frac{6x-12x+18}{3}=1$

55 $-2(b+3)=5-6(2b-7)$

56 سستەمی هێڵی $\begin{cases}6x=4-2y\\12x-4y=16\end{cases}$ شیکاربکە.

ئەم ژمارانە بە شێوەی زانستی بنووسە.

57 7 100 000

58 8 900 000 000

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

59 چوارگۆشەیەك ڕووبەرەکەی دەکاتە x^2+6x+9 درێژییەکەی بەپێی x هەژمێربکە.

وانەی 2

نەخشە ڕادەدارەکان Polynomial Functions



بۆچی

هەردوو ڕێسای هەژمارکردنی قەبارە و رووبەری گشتی دوو نموونەن بۆ نەخشەی ڕادەدار بەکاردێت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا وەك لە پیشەسازیدا.

ئامانجەکان

- نەخشەی ڕادەدار دەناسێتەوە.
- هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی ڕادەدار دەکێشێت و باسی شێوەکەی دەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە نەخشەی ڕادەداری تێدایە .
- بەهای ئەوپەڕی نەخشە دەناسێت.
- لە گۆڕانی نەخشەی ڕادەدار دەکۆڵێتەوە.

لاڤە بەڕێوەبەری کۆمپانیایەکی بەرهەمهێنانی پاکژکەرەوەیە، دەیەوێ دورییەکانی قوتوی هەڵگرتنی پاکژکەرەوەکان دەستکاری بکات.

لەبەشەکانی پێشوو هەندێك نەخشەی وەك نەخشەی هێڵی و نەخشەی دووجات ناسی، ئەوانە دوو باری تایبەتی نەخشەبوون لە نەخشە ڕادەدارەکان.

نەخشە ڕادەدارەکان Polynomial Functions

نەخشەی ڕادەدار: ئەو نەخشەیە کە بە شێوەی ڕێسایەکی ڕادەداری یەك گۆڕاو دەنوسرێت.

چالاکی

دۆزینەوەی نەخشەی ڕادەدار Exploring Polynomial Functions

کۆمپانیایەکی بەرهەمهێنانی پاکژکەرەوە بەرهەمەکانی دەخاتە قوتویەکی لاکێشەتەریبی کە درێژییەکەی 20 cm وپانییەکەی 10 cm وبەرزییەکەی 30 cm بێت. بەرێوەبەری کۆمپانیایەکە دەیەوێت دەستکاری دوورییەکانی قوتوەکە بکات.

1. قەبارە و ڕووبەری گشتی قوتوەکە پێش دەستکاری کردن چەندە؟
2. ئەگەر بەرێوەبەرەکە بیەوێت قەبارە و ڕووبەری گشتیی قوتوەکە بەرێژەی 10% کەمبکاتەوە، ئەوا قەبارە و ڕووبەری گشتی قوتوە پەیدابوەکە چەندن؟
3. بەرێوەبەر بریاریدا کە بەرزییەکەی نەگۆرێت بەڵام درێژییەکەی دوو ئەوەندەی پانییەکەی بێت. قەبارە وڕووبەری گشتییەکەی بە پێی پانییەکەی بەگۆڕاوی x بدۆزەرەوە.
4. ئەو خشتەیەی بەرامبەر تەواو بکە.
5. بەهای x چەند دەبێ کەوا لە قەبارەکەی بکات نزیك بێتەوە لە قەبارەی داواکراو؟ئەم بەهایە وا لە ڕووبەری گشتی دەکات نزیکبێتەوە لە ڕووبەری گشتی داواکراو؟ ڕوونیبکەرەوە.

X	ڕووبەر	قەبارە
9.0	1944	4860
9.1		
9.2		
9.3		
9.4		
9.5		

جێبەجێکردنەکان

پیشە سازی

✓ خاڵی چاودێری

نموونە 1

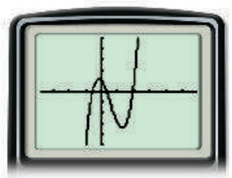
هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە و باسی شێوەكەی بكە.

أ $y = 3x^3 - 5x^2 - 2x + 2$

ب $y = x^4 - 2x^2 + 2$

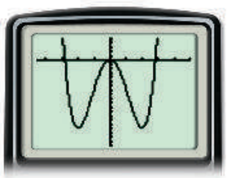
شیكار

أ



هێڵكاری ئەو نەخشەیە سێجایە لە پیتی لاتینی n دەچێت ودوو جێگۆڕكێی تێدایە یەكێكیان بە شێوەی ∪ و دووەمیان بە شێوەی ∩

ب



هێڵكاری ئەو نەخشە پلە چوارە لە پیتی لاتینی W دەچێت و سێ جێگۆڕكێی تێدایە و دووانیان بە شێوەی ∪ و سێیەمیان بە شێوەی ∩ .

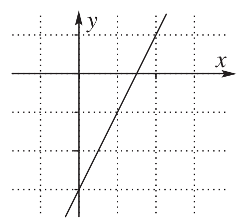
هەوڵبدە هێڵكاری ڕوونكردنەوەی هەریەك لەم نەخشانە بكێشە و باسی شێوەكەی بكە.

أ $y = -3x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

ب $y = 2x^4 - 3x^2 + x + 2$

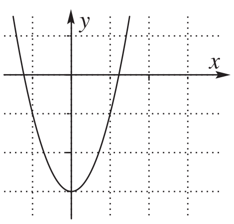
سەرنجی هێڵكاری ڕوونكردنەوەی هەریەك لە نەخشەی هێڵی ودووجا وسێجا وچوارجا لەم وێنانەدا بدە.

نەخشەی هێڵی



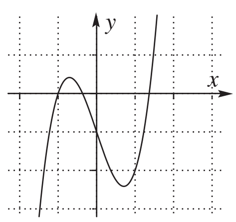
$y = 2x - 3$

نەخشەی دووجا



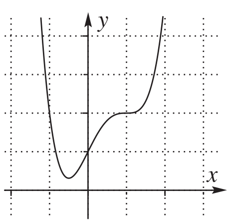
$y = 2x^2 - 3$

نەخشەی سێجا



$y = 2x^3 - 3x - 1$

نەخشەی پلە چوار



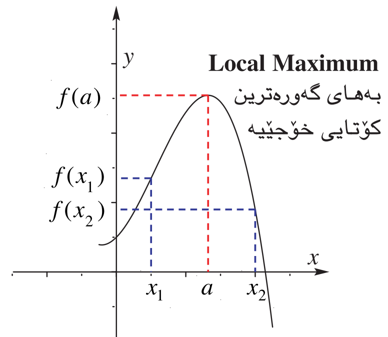
$y = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$

خاڵی چاودێری ✓ مەودای نەخشە پلە تاكەكان دیاریبكە لە نەخشەكانی پێشوودا؟ چی دەڵێیت سەبارەت بە مەودای نەخشە پلە جووتەكان.

Extremum of Polynomial Function بەهایەکانی ئەوپەڕی نەخشە ڕادەدارەکان

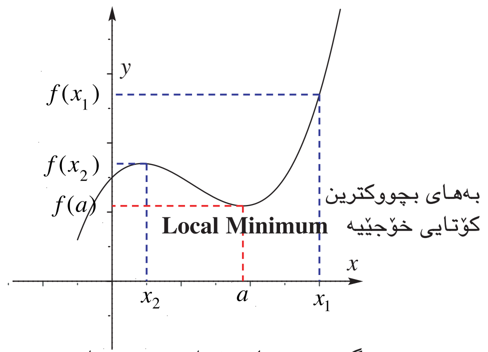
کاتێك هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بەرەو سەرەوە دەچێت وپاشان بەرەوخوارەوە دادەبەزێت لە ماوەیەکی بوارەکەیدا.نەخشەکە بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجێ وەردەگەرێت لەو ماوەیەدا.

بەڵام ئەگەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەرەو خوارەوە بڕوات پاشان بەرەو سەرەوە بچێت لە ماوەیەکی بوارەکەیدا بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی وەردەگرێت لەوماوەیدا.



ئەگەر $x \neq a$ لەماوەی x_1 ، x_2 دا

ئەوا $f(x)<f(a)$



ئەگەر $x \neq a$ لە نێوان x_1 ، x_2 دا

ئەوا $f(x)>f(a)$

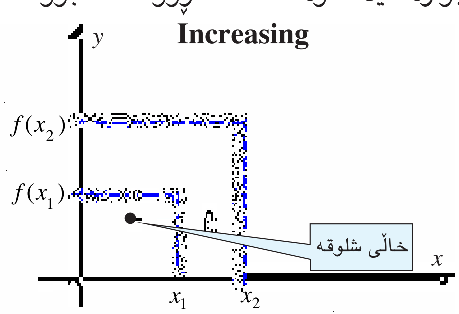
Extremum Value ئەوپەڕی بەها

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت گەورەترین کۆتایی خۆجێیی **Local Minimum** ئەگەر $f(x) < f(a)$ بەهای x هەرچەندێك بێت لەهاوسێی a کاتێك $x \neq a$.

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت بچووکترین کۆتایی خۆجێیی **Local Maximum** ئەگەر $f(x) > f(a)$ بەهای x هەرچەندێك بێت لە هاوسێی a کاتێك $x \neq a$.

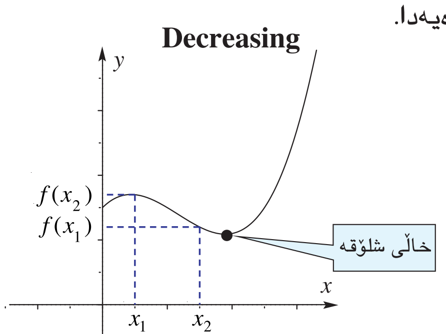
بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت بەهای ئەو پەڕی خۆجێیی نەخشەکە، **Local Extremum** ئەگەر بەهاکە گەورەترین یان بچووکترین بەهای خۆجێیی نەخشەکەبێت.

بەخاڵەکانی سەر هێڵکاری چەماوەکە، کە ئەوپەڕی بەها دەنوێنن دەوترێت خاڵی شلۆق لە ڕێڕەوی نەخشەکە **Turning Points** . نەخشەکە لە کاتی تێپەڕینی بەو خاڵانەدا دەگۆڕێت کە لە ڕوو لە زیاد بوونەوە بۆ ڕوو لە کەمبوون یان لەکەمبوونەوە بۆ زیادبوون. نەخشە سێجاکان بە لایەنی زۆرەوە دوو خاڵی شلۆقیان هەیە. بەڵام نەخشە پلە چوارەکان بە لایەنی زۆرەوە سێ خاڵی شلۆقیان هەیە.بە شێوەیەکی گشتی ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەیەکی پلە n بریتییە لە (n-1) بە لایەنی زۆرەوە. ئەگەر سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەی ئەم دوو نەخشەیە بدەیت، تێبینی ئەوە دەکەیت کە هێڵکاری نەخشەکە لەوانەیە بەرەو سەرەوە یان بەرەو خوارەوە بێت. بەنەخشەیەك دەوترێت ڕوو لە زیادبوونە لە ماوەیەکی بوارەکەی ئەگەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەرەو سەرەوەبێت لەو ماوەیەدا بەڵام ئەگەر هێڵکاری نەخشەکە بەرەو خوارەوە بێت لەماوەیەکی بوارەکەیدا ئەوە نەخشەکە ڕوو لە کەمبوونە لەو ماوەیەدا.



ئەگەر $x_1<x_2$ لە ناوچەی ڕووولەزیادبوندا

ئەوا $f(x_1)<f(x_2)$



ئەگەر $x_1<x_2$ لە ناوچەی ڕوو لە کەمبوندا ئەوا $f(x_1)>f(x_2)$

ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکان Increasing and Decreasing Functions

با x_1 ، x_2 دوو ژمارەی ماوەیەکی بواری نەخشەی $f(x)$ بن .

نەخشەکە ڕوو لە زیادبوون دەبێت کاتێك ئەم مەرجە بێتەدی

ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) < f(x_2)$

نەخشەکە ڕوو لەکەمبوون دەبێت کاتێك ئەم مەرجە بێتەدی

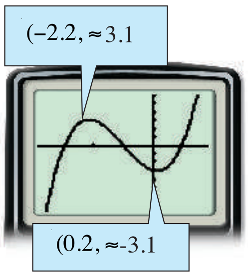
ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) > f(x_2)$

نموونە 2

هێڵکاری ڕونکردنەوەیی $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ بکێشە.

أ بەهای ئەوپەڕی نەخشەکە بۆنزیکترین بەش لە دە نزیکبکەوە.

ب ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە دیاریبکە.

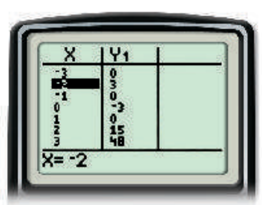


شیکار

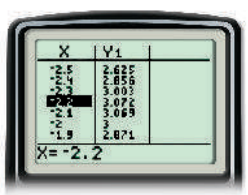
أ هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەکە دوو خاڵی شلۆقی هەیە یەکێکیان بەهای گەورەترینە 3.1 بەنزیکەیی ئەویتریان بەها بچووکترینەوە بە نزیکی 3.1- .

ب نەخشەکە ڕوو لە کەمبوونە لە ماوەی $-2.2 < x < 0.2$ بەدەر لەو ماوەیە ڕوو لە زیادبوونە.

ساغبکەوە خشتەکاری بژمێرەیی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە «ئەگەر دەستتکەوت»بۆساغکردنی بەها نزیکەییەکانی پۆتانەکانی خاڵە شلۆقەکان.



لەم خشتەیەوە دەردەکەوێت کاتێك بەهای x لەهاوسێی 2–دا بێت، بەهای نەخشەکە لە بەهای هاوسێکانی گەورەتر دەبێت ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە پۆی سینی بەهای گەورەترین لە نێوان 3– ، 1– دا دەبێت.



لەم خشتەیە ئەوە ڕووندەبێتەوە کە ژمارەی 3.1 بەهای نزیکەیی بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجێیە.

ئەگەر توانیت هەمان ڕێگا بەکاربێنە بۆ دەرخستنی بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 باسی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەی ڕادەداری $f(x)=2x^2+x^3+3x+1$ بکەو جۆرەکەی دیاریبکە.

2 بەهای گەورەترین وبچووکترین کۆتایی خۆجێیەکەی پێناسەبکە.

3 ئەوپەڕی بەهای نەخشەکە پێناسەبکە.

4 ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکە پێناسەبکە.

5 ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەی پرسیاری 1 دیاریبکە.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

6 هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^3+x^2-2x$ بکێشە.

7 ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەکە چەندە؟

8 ئەوپەڕی بەهاکان دیاریبکە کەبۆ نزیکترین دە نزیکرابنەوە.

9 ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی بۆ دیاریبکە.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە ولە هێڵکاریەکەوە بەهای ئەوپەڕی نەخشەکە وجۆرەکەی دیاریبکە. بەهاکان بۆ نزیکترین بەش لە دە بنووسە.

10 $y=2x^3-5x$

11 $y=x^3+x^2-3x+1$

12 $y=2x^3-4x+1$

13 $y=3x-3-3x^3$

14 $y=-2x+3+x^2$

15 $y=-x^2+6x-11$

16 $y=x^4-5x^2+2$

17 $y=-x^4+x^3+4x^2-3$

18 $y=-3x^3+3x+x^4+3$

19 $y=3x^3-x^4-3x-3$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە وناوچەکانی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونیان بۆ دیاریبکە.

20 $y=x^3-4x$

21 $y=-2x^3+3x$

22 $y=x^4-2x^2+2$

23 $y=-x^4+3x^2+3$

24 $y=-x^2+4x-1$

25 $y=x^2-6x+7$

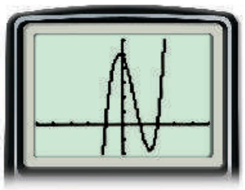
26 $y=x^4-3x^3+3x+3$

27 $y=-x^4+3x^3-3x-3$

28 $y=x^3-3x+3$

29 $y=-x^3+4x-2$

30 شێوەی بەرامبەر بەشێکی هێڵکاری نەخشەی $y = 10x^3 - 25x^2 + x^4 - 10x + 24$ دەنوێنیت، سەرنجبدە کە هەموو سیفەتەکانی نەخشەکە ڕوون نییە وەك لە وێنەکەدا دیارە. چۆن وا دەکەیت تا ڕوونببێتەوە؟



ئەندازە نەخشەیەکی زۆر ڕادەدار بنووسە هەژمێری ڕووبەرو قەبارەی داواکراو بکات.

31 قەبارەی شەش پالۆیەك لایەکی $2x$ سم بێت.

32 ڕووبەری گشتی شەش پالۆیەك لایەکی x سم بێت.

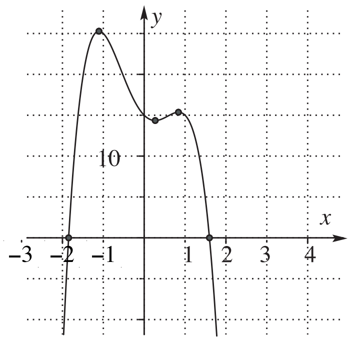
33 ڕووبەری گشتی لاکێشە تەریبێك بەرزیەکەی x سم ودرێژی بنکەکەی $7x$ وپانییەکەی $3x$ سم بێت.

34 قەبارەی لولەکێك بەرزییەکەی 5 م ونیوتیرەی بنکەکەی x م بێت.

35 شێوەی بەرامبەر بەشێك لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = -x^4 + 2x^2 - x + 3$ دەنوێنێت.

أ بەهای نزیکەیی سفرەکانی نەخشەکە بنووسە.

ب بەهایەکانی ئەوپەڕی نەخشەکە بە نزیکەیی بنووسە.



ڕوانینێك بۆ دواوە

36 ئەم خشتەیە تەواو بکە کە بەهای ڕادەداری $g(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ هەژمێر بکات. پاشان بەهای گەورەترین وبچووکترین بەهای x ی هەر یەکێکیان دیاریبکە.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$g(x)$									

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

37 $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

38 $(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

وانەی 3

لێکدان ودابەشکردنی ڕادەدارەکان

Multiplying and Dividing Polynomials

بۆچی

دەتوانیت شیتەڵکردن بەکاربێنیت بۆ پێکهێنانی ڕادەدارێك کە قەبارەی خشتەکێك یان لاکێشەتەرییبێك کە لە سەرەوە کراوەیە بنوێنێت.

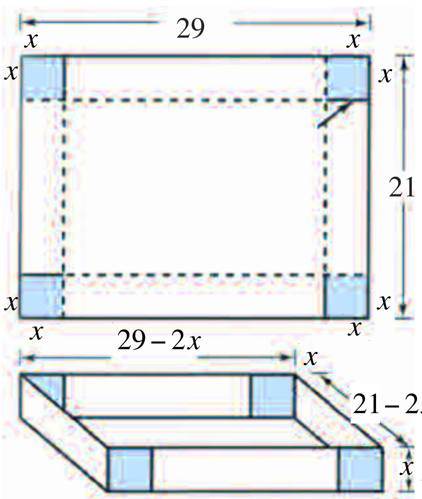


ئامانجەکان

- ڕادەدارێك لە یەکێکی تردەدات.
- ڕادەدارەکان بە بەکارهێنانی هاوئەنجامە ناسراوەکان شیتەڵدەکات.
- بیردۆزی هاوکولکە بۆ دۆزینەوەی کولکە ڕادەدارەکان بەکاردەهێنێت.
- ڕادەدارێك بەسەر یەکێکی تردا دابەشدەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی بیردۆزی هاوکۆلکەو بیردۆزی ماوە شیکاردەکات.

جێبەجێکردنەکان

پیشەسازی



بۆ دروستکردنی لاکێشە تەرییبێکی کراوە لەسەرەوە بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێك، پێویستە چوار چوارگۆشەی یەکسان لە گۆشەکانیدا ببڕیت ولاکان بنوشتێنیتەوە. قەبارەی قوتوە پەیدابووەکە بە هۆی پێوانەی پارچە کارتۆنەکەو لاکانی چوار گۆشە بڕاوەکە دیاری دەکرێت. ئەگەر هاتوو درێژی لاکانی کارتۆنەکە 29 cm و 21 cm بێت ئەوا قەبارەی قوتوەکە $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$

کاتێك x درێژی لایەکی چوارگۆشە بڕاوەکە بێت.

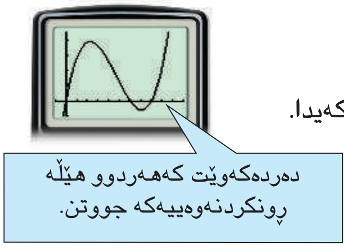
لێکدانی ڕادەدارەکان Multiplying Polynomials

نموونە 1

قەبارەی قوتوەکە $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$ وەك ڕادەدارێك بە شێوەی گشتی بنووسە.

شیکار

$$\begin{aligned}
v(x) &= x(29-2x)(21-2x)\\
&= x\left[29(21-2x)-2x(21-2x)\right]\\
&= x\left[609-58x-42x+4x^2\right]\\
&= x\left[609-100x+4x^2\right]\\
&= 609x-100x^2+4x^3\\
&= 4x^3-100x^2+609x
\end{aligned}$$



ساغبکەوە

دەتوانیت ڕاستی لێکدانەکەت پاسادان بکەیت بە بەکارهێنانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $V(x)$ بە شێوەی یەکەمیداو بەشێوەی گشتیەکەیدا.
ئەگەر هەردوو چەماوەکە جووتبوون لێکدانەکەت ڕاستە.

هەوڵبدە نەخشەی $f(x)=2x^2(x^2+2)(x-3)$ وەک ڕادەدارێک بەشێوەی گشتی بنووسە.

شیتەڵ کردنی ڕادەدارەکان Factoring Polynomials

بۆ ئەوەی ڕادەدارێک شیتەڵبکەیت، هەوڵبدە بە شێوەی لێکدانی دوو هاوکۆلکە یان زیاتر بنوسیت.

نموونە 2 ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

أ x^3-5x^2-6x ب x^3+4x^2+2x+8

شیکار

أ $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)$ گەورەترین کۆلکەی هاوبەش دەربێنە

$=x(x-6)(x+1)$ برە دووجاکە شیتەڵبکە.

ب دەتوانین ڕادەدارەکە x^3+4x^2+2x+8 کە بە دەرهێنانی گەورەترین کۆلکەی هاوبەش لە نێوان ڕادەی یەکەم ودووەم و ڕادەی سێیەم و چوارەم شیتەڵبکەین.

$x^3+4x^2+2x+8=(x^3+4x^2)+(2x+8)$ بەیەکەوەبەستن ڕادەکان

$=x^2(x+4)+2(x+4)$ هەریەک لەدوو ڕادەیەی ناو کەوانەکە شیتەڵبکە

$=(x^2+2)(x+4)$ بەهاوبەش وەرگرین $(x+4)$

هەوڵبدە ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

أ x^3-9x ب x^3-x^2+2x-2

هاوئەنجامە ناسراوەکان ڕۆڵێکی گرنگ دەبینن لە شیتەڵکردنی ڕادەدارەکاندا.

هاوئەنجامە ناسراوەکان Special Identities

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

نموونە 3 ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

أ $x^2-10x+25$ ب $49y^2+14y+1$

ج $4y^2-25$ د x^3+27 هـ x^3-8

شيكار

أ $x^2-10x+25=(x)^2+2\times5x+(5)^2=(x+5)^2$

ب $49y^2+14y+1=(7y)^2+2\times1\times7y+(1)^2=(7y+1)^2$

ج $4y^2-25=(2y)^2-(5)^2=(2y+5)(2y-5)$

د $x^3+27=(x)^3+(3)^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

هـ $x^3-8=(x)^3-(2)^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

هەوڵبدە هەردوو ڕادەداری x^3+1000 و x^3-125 شیتەڵ بكەیت.

لەيادت بێت ئەگەر ژمارەی x يەكێ لە سفرەكانی نەخشەی $f(x)$ بێت كاتێك $f(x)=0$ مانای -2 يەكێكە لە سفرەكانی نەخشەی $f(x)=x^3+8$ لەبەر ئەوەی $f(-2)=(-2)^3+8=-8+8=0$
ئەگەر سەرنجی نەخشەی $f(x)=(x-2)(3x^2+5x-4)$ بدەیت. بەزوویی بۆت دەردەكەوێت كە ژمارە 2 سفرێكە لە سفرەكانی نەخشەكە $(f(2)=0)$.
ئێستا پێچەوانەی ئەم ڕاستییە بخەرە پێش چاوی خۆت. بۆ نموونە ئەگەر ژمارە $\frac{1}{4}$ سفرێك بێت لە سفرەكانی نەخشە ڕادەدارەكە، ئایا برِی $\left(x-\frac{1}{4}\right)$ كۆلكەیەكە لە كۆلكەكانی؟ وەڵامی ئەمەش لەم بیردۆزەدا دەردەكەوێت.

بیردۆزی كۆلكە Factor Theory

ئەگەر ژمارە a سفرێك بێت لە سفرەكانی نەخشەی ڕادەداری $f(x)$، ئەوا $(x-a)$ كۆلكەیەكە لە كۆلكەكانی، پێچەوانەكەشی ڕاستە.

دەتوانیت ئەم بیردۆزە بۆ شیتەڵكردنی ڕادەدارەكان بەكاربێنیت.

نموونە 4 ئایا برِەی $x+2$ كۆلكەیەكە لە كۆلكەكانی نەخشەی ڕادەداری $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

شيكار

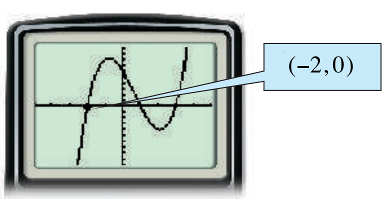
$x+2$ بە شێوەی $x-a$ بنووسە

$x+2=x-(-2)$ كەواتە $a=-2$

$f(-2)$ هەژمار بكە

$$f(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+6$$
$$=-8-2\times4+10+6$$
$$=-8-8+10+6=0$$

كەواتە $(x+2)$ كۆلكەیەكە لە كۆلكەكانی $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$



لە هێڵكاری ڕونكردنەوەیەكەوە دەردەكەوێت −2 سفرێكە لە سفرەكانی نەخشەكە.

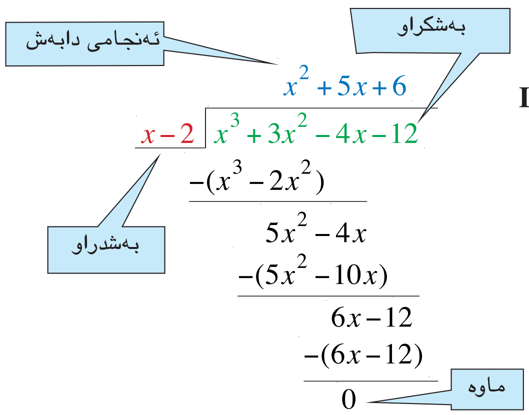
هەوڵبدە ئایا برِی $(x+3)$ كۆلكەیەكە لە كۆلكەكانی ڕادەداری x^3-3x^2-6x+8

دەتوانیت ڕستەی لێكدانی برەكان بە شێوەی دابەشكردن بەدوو ڕێگای جیاواز بنووسین.

$$x^3+3x^2-4x-12=(x^2+5x+6)(x-2)$$

$$\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x-2}=x^2+5x+6 \qquad \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+5x+6}=x-2$$

دەتوانیت ڕادەدارەكان بەسەر $x-a$ دابەشبكەین
بەبەكارهێنانی دابەشی ئەقلیدی Long Division
یان دابەشی بژمێرەیی Synthetic Division
« التركيبية» واتە دابەشكردنی ئەقلیدی
ڕادەدارەكان لە دابەشكردنی ژمارەكان دەچێت.
سەرنجی دابەشكردنی $x^3+3x^2-4x-12$ بەسەر
$x-2$ بدە :



هەنگاوی 1 ڕادەدارەكان بە شێوەی گشتی بنووسە.

هەنگاوی 2 ڕادەی یەكەمی بەشكراو بەسەر ڕادەی یەكەمی بەشداراو دابەش بكە. $x^3 \div x = x^2$

هەنگاوی 3 x^2 لە ئەنجامی دابەش بوونەكەدا پەیدا دەبێ بنووسە ولە بەشكراوەكە بدە $x^2(x-2)=x^3-2x^2$

هەنگاوی 4 ئەنجامی لێكدانی x^3-2x^2 لە بەشكراوەكە دەربكە.

هەنگاوی 5 هەنگاوەكانی 1 و 2 و 3 لە ئەنجامی لیكدەركردنەكە دووبارەبكەوە.

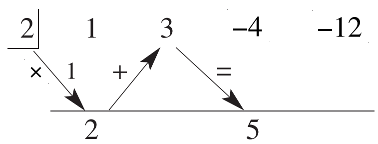
دابەشكردنی بژمێری:

دابەشكردنی بژمێرەیی كارئاسنیت بۆ دەكات لەبەر ئەوەی گۆڕاوەكان نانووسینەوە.

هەنگاوی 1 : بەشداراو لە لای چەپ وڕادەداری بەشكراو لای ڕاست بە شێوەی گشتی بنووسە.

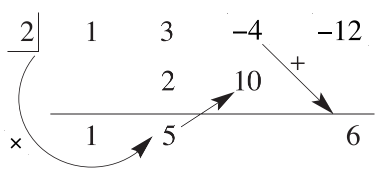
$x-2$	$x^3+3x^2-4x-12$			
2	1	3	−4	−12
	↓			
	1			

هەنگاوی 2 : ژمارەی a (لێرەدا 2) لە لای چەپ وهاوكۆلكەكانی ڕادەدارەكە لە لای ڕاستدا بنووسە.هاوكۆلكەی یەكەم (لێرەدا 1) لە ژێر هێڵەكە ولە هاوكۆلكەی دووەمدا بنووسە.



هەنگاوی 3 : 2 لە 1 بدە وئەنجامەكەی لەگەڵ 3 دا كۆبكەوە.بەمەش (5) ت دەست دەكەوێت. لە ژێر هاوكۆلكەی سێیەم ڕادەدار بنووسە.

هەنگاوی 4 : 2 لە 5 بدە وئەنجامەكەی لەگەڵ 4 - دا كۆبكەوە وبەمەش(6)ت دەست دەكەوێت. 6 لە ژێر هاوكۆلكەی چوارەم ڕادەدار بنووسە.



2	1	3	−4	−12
		2	10	12
	1	5	6	0

ئەنجامی دابەشکردن: $x^2 + 5x + 6$

ماوە: 0

هەنگاوی 5 : 2 لە 6 بدە وئەنجامەکەی لەگەڵ 12- ، داکۆبکەوە. بەمەش سفرت دەست دەکەوێت.

ماوەی کرداری دابەشکردنەکە بریتییە لە سفر، ئەو ژمارانەی لە کۆتایدا دەستمان کەوتوون 1 ، 5 ، 6 کە هاوکۆلکەی ئەنجامە دابەشکردنەکەیە کەواتە ئەنجامی دابەش کردنەکە بریتییەلە x^2+5x+6 کەواتە دابەشکردنی بژمێری کاتێك بەکاردێت کە بەشدراوەکە برێکی هێڵی لەسەر شێوەی $x-a$ بێت، بەڵام ئەگەر بەشدراوەکە پلەکەی لە 1 زیاتربێت، پێویستە دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی) بەکاربهێنیت.

نموونە 5

ڕادەداری x^3+3x^2+3x+2 بەسەر x^2+x+1 دابەشبکە.

شیکار

دابەشکردنی ئەقلیدی

هەنگاوی 1: $x^3 \div x = x$ دابەشبکە.

x لە ئەنجامی دابەش کردنەکەدا بنووسە.

هەنگاوی 2 : x لەبەشدراو بدە و ئەنجامەکەی لە بەشکراو دەربکە.

هەنگاوەکانی پێشوو دووبارە بکەوە، تا برێکت دەست دەکەوێت کە پلەکەی لە پلەی بەشدراو کەمتر بێت.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\
x^2+x+1 & x^3+3x^2+3x+2 \\
 & -(x^3+x^2+x) \\
 & \quad 2x^2+2x+2 \\
 & \quad -(2x^2+2x+2) \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

ئەنجامی دابەش
بەشکراو
بەشدراو
ماوە

هەوڵبدە برەی $x^3+3x^2-13x-15$ بەسەر x^2-2x-3 دابەشبکە.

نموونە 6

ڕادەداری x^3+x-10 بە بەکارهێنانی دابەشکردن شیتەڵبکە ئەگەر زانیت 2 سفرێکە لە سفرەکانی ڕادەدارەکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم: دابەشکردنی ئەقلیدی بەکاربێنە.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+5 \\
x-2 & x^3+0x^2+x-10 \\
 & -(x^3-2x^2) \\
 & \quad 2x^2+x \\
 & \quad -(2x^2-4x) \\
 & \qquad 5x-10 \\
 & \qquad -(5x-10) \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

ڕێگای دووەم: دابەشکردنی بژمێری بەکاربێنە.

2	1	0	1	−10
		2	4	10
	1	2	5	0

x^2+2x+5

بروانە 5 بەکارهێنراوە وەك کۆلکەیەك بۆ ڕادەی x کە دیار نییە لە بەشکراو

هەوڵبدە ڕادەداری $x^3-13x-12$ شیتەڵبکە بە بەکارهێنانی دابەشکردن ئەگەر زانیت 3– سفرێکە لە سفرەکانی ڕادەدارەکە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ڕوونیبکەوە بۆچی ئەنجامی لێکدانەکان لە دابەشکردنی بژمێرەییدا کۆدەکرێتەوە، بەڵام لە دابەشکردنی ئەقلیدیدا لە یەك دەردەکرێن.

بە پێی بیردۆزی ماوە. بەهای ڕادەداری $P(x)$ لە کاتی لە جیاتیدانانی a لە x بریتییە لە بەهای ماوەی دابەشی ڕادەدارەکە بەسەر $(x-a)$دا .

ئەگەر $P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$ ئەوا $p(-3)$ یەکسانە بە ماوەی دابەش کردنی $P(x)$ بەسەر $x-(-3)=x+3$.

-3	2	7	2	1
		-6	-3	3
	2	1	-1	4

ماوە بریتیە لە 4

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$

بە لەجیاتیدانان

$$P(-3)=2(-3)^3+7(-3)^2+2(-3)+1=4$$

بیردۆزی ماوە **Remainder Theorem**

ماوەی دابەشکردنی ڕادەداری $P(x)$ بەسەر $(x-a)$ دا بریتییە لە ژمارەی $P(a)$ (بەهای p کاتێك لە جیاتی x ژمارەی a دادەنرێت).

نموونــــە 7

$P(5)$ **هەژمار بکە کاتێك** $P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$

شیکار

ڕێگای یەکەم: دابەشکردنی بژمێری بەکاربهێنە.

5	2	7	2	1
		10	85	435
	2	17	87	436

کەواتە $P(5)=436$

ڕێگای دووەم: لە جیاتیدانان بەکاربهێنە.

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$
$$P(5)=2(5)^3+7(5)^2+2(5)+1$$
$$=250+175+10+1$$
$$=436$$

هەوڵبدە $P(3)$ هەژمێربکە کاتێك $P(x)=3x^3+2x^2-3x+4$

ڕاهـێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ڕوونبکەوە چۆن هاوئەنجامە ناسراوەکان بۆ شیتەڵکردنی ڕادەداری x^3-4xبەکاردێنیت

2 ڕوونبکەوە چۆن بیردۆزی کۆلکە بەکاردێنیت تا بزانی ئایا $(x+1)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی x^3-2x^2-8x-5 یان نا.

3 ڕوونیبکەوە چۆن بیردۆزی ماوە بەکاردەهێنیت بۆ هەژمێر کردنی $P(5)$ کاتێك $P(x)$ ڕادەدار بێت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 ڕادەداری $P(x)=x(10-x)(2+x)$ بە شێوەی گشتی بنووسە.

هەر یەك لەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

5 x^3-5x^2+6x **6** $x^3+5x^2+3x+15$ **7** x^3-216

8 لە جیاتیدانان بەکاربهێنە تابزانیت ئایا $(x+2)$کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی ڕادەدارەی x^3+4x^2+5x+2 یان نا.

9 $(x^3+4x^2+4x+3)\div(x^2+x+1)$ هەژمێر بکە.

ئەگەر **3–** سفرێك بێت لە سفرەکانی نەخشەی $f(x)=x^3-14x-15$،ئەوا نەخشەکە شیتەڵبکە بە بەکارهێنانی:

10 دابەشکردنی بژمێری   **11** دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی)

ئەگەر $f(x)=2x^3+3x^2+4x+1$ ، $f(2)$ دیاریبکە بە بەکارهێنانی :

12 دابەشکردنی بژمێری   **13** دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی)

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

هەر یەك لەم ڕادەدارانە بە شێوەی گشتی بنووسە.

14 $3x^2(4x^3-2x^2+5x+2)$ **15** $(2x-3)(x+4)$

16 $(2x+3)(x^3-5x^2+4)$ **17** $(x-5)(-3x^3-4x-1)$

18 $(x-3)(2-x)(x-1)$ **19** $(2x-4)(x+1)^2$

20 $(2x+1)^3$ **21** $(-3x^2-x+2)(x+1)^2$

22 $\left(x-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{7}\right)$ **23** $\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

24 x^3+8x^2+15x **25** x^3+2x^2-3x

26 $3x^3-300x$ **27** $18x^3-60x^2+50x$

28 x^3+3x^2-x-3 **29** $x^3-2x^2-5x+10$

30 x^3+x^2+x+1 **31** $1-x+x^2-x^3$

32 x^3+9x^2+14x **33** x^3+x^2+2+2x

34 x^3-64 **35** $27x^3-125$

36 x^6-1 **37** $27+8x^6$

ئایا بڕی هێڵی بەرامبەر ئەو ڕادەدارانە کۆلکەیەکن لە کۆلکەکانی ڕادەدارەکە یان نا.(لە جیاتیدانان بەکاربهێنە).

38 x^2+x+1 ؛ $x-1$ **39** $x^3+5x^2-18x-48$ ؛ $x+6$

40 $x^3+3x^2-18x-40$ ؛ $x-4$ **41** $x^3-8x^2+9x+18$ ؛ $x-6$

42 x^3+6x^2-x-30 ؛ $x-2$ **43** $x^3-x^2-17x-15$ ؛ $x+3$

بە دابەشکردنی ئەقلیدی ئەنجامی ئەمانە بدۆزەرەوە:

44 $(x^2+4x+4)\div(x+2)$ **45** $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

46 $(x^3-7x-6)\div(x+1)$

47 $(x^3+11x^2+39x+45)\div(x+5)$

48 $(3x^2-x+x^3-3)\div(x^2+4x+3)$

49 $(x^3+6x^2-x-30)\div(x^2+8x+15)$

50 $(x^3-5x^2-13x+42)\div(x^2+x-7)$

51 $(10x-5x^2+x^3-24)\div(x^2-x+6)$

52 $\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

53 $\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}\right)\div\left(x+\frac{3}{4}\right)$

بە دابەشکردنی بژمێری ئەنجامی ئەمانە بدۆزەرەوە

54 $(x^2-4x-12)\div(x-4)$ **55** $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

56 $(x^3+x^2-9x-9)\div(x+1)$

57 $(x^3-2x^2-22x+40)\div(x-4)$

58 $(x^2+5x^3-18)\div(x+3)$

59 $(x^3-27)\div(x-3)$ **60** $(x^3+3)\div(x-1)$

61 $(x^2-6)\div(x+4)$

بە دابەشکردنی بژمێری و لەجیاتیدانان بەهای داواکراو هەژماربکە.

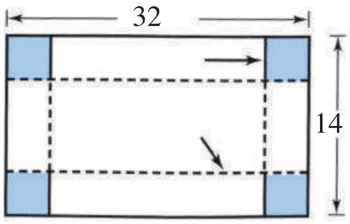
62 $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(1)$ **63** $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(2)$

64 $f(x)=4x^2-2x+3$ ؛ $f(3)$

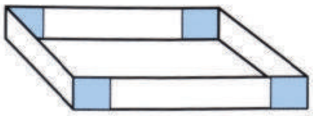
65 $f(x)=3x^3+2x^2+3x+1$ ؛ $f(-2)$

بەهای k چەندە بۆ ئەوەی بڕە هێڵەکە کۆلکەیەك بێت لە کۆلکەکانی ڕادەدارەکە.

66 x^3+3x^2-x+k ؛ $x-2$ **67** kx^3-2x^2+x-6 ؛ $x+3$

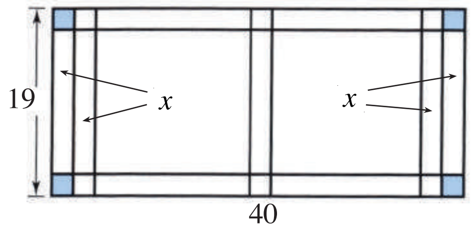


پیشە سازی بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی درێژی 32 سم وپانییەکەی 14سم بێت قوتویەك سەرەکەی کراوە دروستکراوە لەم شێوە دەردەکەوێت ئەگەر بەرزی قوتوەکە x سم بێت ئەوا قەبارەکەی بریتییە لە $V(x)=x(14-2x)(32-2x)$.



68 قەبارەی قوتوەکە بە شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بنووسە.

69 قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزییەکەی 2 سم بێت؟





پیشە سازی بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکیشەیی درێژیەکەی 40 سم و پانیەکەی 19 سم قوتویەکی پیتزا دروست کرا، ئەگەر بەرزی قوتوەکە x سم بێت ئەوا قەبارەکەی بریتییە لە $V(x)=\frac{1}{2}x(19-2x)(40-5x)$

70 قەبارەی قوتوەکە بە شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بنووسە.

71 قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزیەکەی 2 cm سم بێت؟

72 قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزیەکەی 2.5 cm بێت؟

تێروانینێك بۆ دواوە

73 لاسەنگەی $x+3\leq 3(x-1)$ شیکار بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

ئەم برانە شیتەڵبکە.

74 $5b^2-5c^2$ **75** $2x^2-32y^2$ **76** x^2+x-12

77 $5-6x+x^2$ **78** $4x^2+4x+1$ **79** $2x^2+11x+15$

کۆبکەوە یان لێدەربکە.

80 $(2x^2-7x+5)+(x^3+6x^2-4x+1)$

81 $(x^4-5x^2-x)-(x^4+4x^3-x+6)$

82 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3+1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)$

83 $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)-(4.9x^3+2.5x^4)$

تێروانینێك بۆ پێشەوە

84 ژمارەی سفرەکانی نەخشەی $f(x)=x^3+4x^2-3x-18$ دواى هەژمێر کردنی $f(2)$ دیاریبکە.

وانەی 4

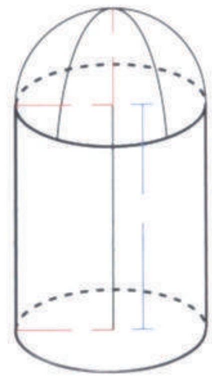
هاوکێشە ولاسەنگە ڕادەدارەکان

Polynomial Equations and Inequalities



بۆچی

دەتوانیت زۆر لە پێداویستیەکانی ژیان بە بەکارهێنانی هاوکێشە ولاسەنگەکان جێبەجێ بکەین وەك دیاری کردنی نیوەتیرەی بنکەی سایلۆیەکی دانەوێلە بەقەبارەیەکی دیاری کراو.



ئامانجەکان

- بە شیتەڵکردن هاوکێشەی ڕادەدار شیکار دەکات.
- بە ڕوونکردنەوەیی ڕەگەکانی هاوکێشە دەخەملێنێت.
- بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی ڕادەدار شیکار دەکات.

جێبە جێکردنەکان

کشت وکاڵ

پاش ئەوەی جوتیارەکان دانەوێڵەکانیان دەدورنەوە لە سایلوی تایبەتیدا دانەوێڵەکە هەڵدەگرن. ئەو سایلۆیانەش پێکدێت لە لولەکێکی بازنەیی وەستاو، نیوەگۆیەکی بەسەرەوەیە. وەك لە وێنەکەی سەرەوەدا دیارە. دەشزانیت بۆ قەبارەی لولەك ئەم ڕێسایە بەکاردەهێنیت $C(r)=\pi r^2 h$ کاتێك C قەبارە، و r نیوەتیرەی بنکە، و h بەرزی لولەکەکەبێت، هەروەها قەبارەی گۆ بە پێی ئەم یاسایە هەژمار دەکەین $H(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ لەوەی پێشو دەردەکەوێت کە قەبارەی سایلوکە بەم چەشنە دەبێت. $T(r)=H(r)+C(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$

شاسوار دەیەوێت سایلۆیەکی دانەوێلەکە بەرزی 8m قەبارەکەی 650 مەترسێجا دروست بکات، پێویستە نیوەتیرەی سایلۆکە بەچەند دابنێت.

نموونە 1

هاوکێشەی $2x^3-7x^2+3x=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار

$$2x^3-7x^2+3x=0$$

$$x(2x^2-7x+3)=0$$ بە دەرهێنانی گ.ك.هـ

$$x(2x-1)(x-3)=0$$ شیتەڵکردنی بڕی دووجا

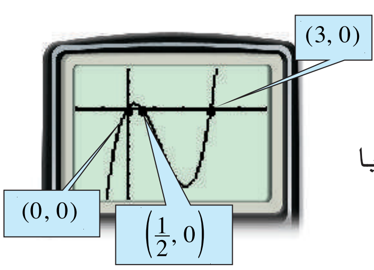
$x=0$ یان $2x-1=0$ یان $x-3=0$ بەبەکارهێنانی لێکدانی سفری

$x=0$ یان $x=\frac{1}{2}$ یان $x=3$

ساغبکەوە

هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی $y=2x^3-7x^2+3x$ بکێشە وسەرنجی سفرەکانی بدە.

ئەگەر سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بدەیت دڵنیا دەبیت لەوەی سفرەکانی نەخشەکە هەمان ئەو بەهایانەیە کە بە شێوەی جەبری دۆزیبوتەوە.



هەوڵ بدە هاوکێشەی $2x^3+x^2-6x=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.



شیتەڵکردنی ڕادەدارەکە بووە هۆی شیکارکردنی هاوکێشەکەی پێشوو، برەکە شیتەڵ بوو بۆ ئەنجامی لێکدانی 3 کۆلکە، لەمەوە هاوکێشەکە 3 شیکار یان 3 ڕەگی جیاوازی هەیە. بەڵام لەهەندێ هاوکێشەی ڕادەدار ڕەگەکان دووبارە دەبنەوە وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت:

نموونە 2

هاوکێشەی $x^3-7x^2+15x-9=0$ بەبەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی و دابەشکردنی بژمێری و شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=x^3-7x^2+15x-9$ بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ڕەگەکانی هاوکێشەکە. لە هێلکاریەکەوە ڕوون دەبێتەوە کە 1 یەکێك لە سفرەکانی نەخشەکەیە ، دەشتوانین دڵنیا بین لەوە بەدانانەوەی بەهاکە لە جیاتی x . بیردۆزی هاوکۆلکە ودابەش کردنی بژمێری بەکاربهێنە بۆ دابەش کردنی $x^3-7x^2+15x-9$ بەسەر $x-1$.

1	1	−7	15	−9
		1	−6	9
	1	−6	9	0

ماوە= 0

ئەنجامی دابەش بریتییە لە x^2-6x+9

کەواتە،

$$x^3-7x^2+15x-9=(x-1)(x^2-6x+9)$$
$$=(x-1)(x-3)^2$$

$x-1=0$ یان $x-3=0$ یان $x-3=0$

$x=1$ یان $x=3$ یان $x=3$

ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^3-7x^2+15x-9=0$ بریتییە لە 1 و 3 ورەگی 3 دووجار دووبارە بۆتەوە.

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^3+2x^2-4x-8=0$ بە ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن شیکاربکە.

لەوانەیە کۆلکەی $(x-a)$ لە شیتەڵکردنی ڕادەدارێکی وەك y دووبارە ببێتەوە وەك لە نموونەی پێشوودا بینرا. لەم بارەدا دەوترێت a **ڕەگێکی دووبارەیە Multiple Root** . بە ژمارەی ئەو جارانەی کە $(x-a)$ تیا دووبارە دەبێتەوە لەو هاوکێشەی $P(x)=0$ دەوترێت پلەی دووبارەبوونەوەی ڕەگی a . ڕەگی 3 لە هاوکێشەکە ڕەگێکی دووبارەبوونەوەی پلە دووە. کاتێك ڕەگی a لە ڕادەدارێکدا دووبارە دەبێتەوە واتا هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە لە تەوەری x دەکەوێت لە خاڵی $(a,0)$ بێ ئەوەی ببڕێت. ناشتوانین بڵێین خاڵی لێکەوتن هەمیشە ڕەگیکی دووبارە بوونەوەیە. لەبەر ئەوەی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیەکە ئەوەندە وورد نییە کە ئەمەی لێ دەرئەنجام بدەین. دەتوانین هەندێك ڕادەدار شیتەڵبکەین بە دانانی گۆڕاوێکی تر لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە وەك لەم نموونەدا دەردەکەوێت.

نموونە 3

هاوکێشەی $x^4-4x^2+3=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار

شیکارکردنی پرسیارەکان

1. **شیکارکردنی پرسیارێکی سادەتر:** دەتوانین ڕادەداری x^4-4x^2+3 بگۆڕین بۆ ڕادەدارێکی دووجا بە دانانی $y=x^2$ لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە، ئەو کاتە ڕادەدارەکە دەبێتە y^2-4y+3

$$x^4-4x^2+3=0$$
$$(x^2)^2-4(x^2)+3=0$$
$$y^2-4y+3=0$$
$$(y-1)(y-3)=0$$
$$y=1 \text{ یان } y=3$$

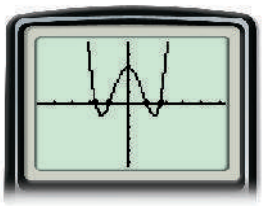
2. له جیاتی x^2 له y دادەنێین پاشان بەهای x بدۆزەرەوە کە ڕەگەکان هاوکێشە بنەڕەتییەکە

دیاریدەکەین $x^2=1$ یان $x^2=3$

$x=\pm1$ یان $x=\pm\sqrt{3}$

ڕەگەکانی هاوکێشە بنەڕەتییەکە بریتییە لە $x=-1$ $x=1$ $x=-\sqrt{3}$ $x=\sqrt{3}$

ساغبکەوە



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^4-4x^2+3$ بکێشە و سەرنجی سفرەکانی نەخشەکە بدە دەبینیت هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە تەوەری سینی دەبڕێت لە -1 و 1 و لە دوو خاڵی هاوجێ بە پێی تەوەرەی صادەکان لە $-\sqrt{3}\approx-1.7$ وە $\sqrt{3}\approx1.7$ دەنوێنن.

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^4-9x^2+14=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی ڕادەدار Number of Roots for Polynomial Equation

لە نموونەکانی پێشوو دەرکەوت ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە سێ بریتییە لە 3 ڕەگە و ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە چوار دەبێتە 4 ڕەگ بەڵام ئەمە بە گشتی ڕاست نییە.

نموونە 4 هاوکێشەی $x^4-1=0$ شیکاربکە.

شیکار

$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$ جیاوازی نێوان دوو دووجا

$=(x^2+1)(x-1)(x+1)$

ناتوانین کۆڵکەی x^2+1 شیتەڵبکەین لەبەر ئەوەی ئەم ڕادەدارە لە ژمارە ڕاستییەکاندا هیچ سفرێکی نییە چونکە x^2 ژمارەیەکی سالب نابێت.

کەواتە، ژمارەی ڕەگەکان هاوکێشەی $x^4-1=0$ تەنها دوو ڕەگە.

لاسەنگە ڕادەدارەکان Polynomial Inequalities

نموونە 5 لاسەنگەی $x^4-4x^2<0$ شیکاربکە.

شیکار



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^4-4x^2$ بکێشە لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە دەردەکەوێت کە -2 و 0 و 2 سفرەکانی نەخشەکەن و بەهای نەخشەکە سالب دەبێت کاتێك x بەهای 2- و 2 وەردەگرێت جگە لە سفر واتا $-2<x<2$ جگە $x\neq0$.

هەوڵ بدە لاسەنگەی $x^4-4x^2\le0$ شیکاربکە.

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئـەو پـەیوەندیانـە ڕوونبکـەوە کـە سفری نـەخشـەکـە وڕەگی هـاوکێشـەکـە و هـاوکۆلکـەی ڕادەدارو خـاڵی یـەکتربڕین لـەگـەڵ تـەوەری سینی بـەیـەکـەوە دەبـەستێتـەوە.

2 چی دەڵێیت دەربـارەی سفرەکـانی نـەخشـەیـەکی ڕادەدار لـە جـۆری $y=(x-3)^n$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستە کراو

بـە شیتـەڵکردن ئـەم هـاوکێشانـە شیکاربکـە.

3 $x^3-x^2-12x=0$

4 $x^3+15x^2+54x=0$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی هەموو ڕەگەکانی هاوکێشەکانی.

5 $x^3-5x^2+3x=0$

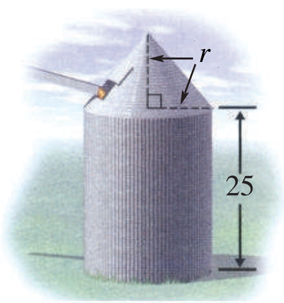
6 $x^3-3x-2=0$

بە هۆی گۆڕاوێکی نوێ وشیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بدۆزەوە.

7 $x^4-8x^2+16=0$

8 $x^4-2x^2+1=0$

9 ئـەگـەر نـەخشـەی $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^3+25\pi r^2$ قـەبـارەی سایلۆیـەکی دانـەوێڵـە بنوێنێت وەك لـە شێوەی بـەرامبـەردا هـاتووە کـاتێك r نیوە تیرەی بنکـەی لوولـەکـە بێت بـە مـەترە، نیوە تیرەی بنکـەی لوولـەکـە هـەژمێر بکـە بۆ نزیکترین دە نزیکبکـەوە، ئـەگـەر قـەبـارەی سایلۆکـە $2\ 042m^3$ بێت.



ڕاهێنان وجێبەجێکردن

بـە شیتـەڵکردن ڕەگەکانی ئـەم هـاوکێشانـە دیاریبکـە.

10 $x^3+2x^2-35x=0$

11 $x^3+2x^2-48x=0$

12 $x^3-13x^2+40x=0$

13 $x^3-7x^2+10x=0$

14 $x^3=25x$

15 $y^3=49y$

16 $2x^3-10x^2-100x=0$

17 $16x-6x^2-x^3=0$

18 $3y^3+9y^2-162y=0$

19 $20d^2+5d^3-60d=0$

20 $110x-2x^3=12x^2$

21 $3y^3+36y^2=3y^4$

بە شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

22 $d^3 - d^2 - 5d - 3 = 0$

23 $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

24 $2b^3 + 16b^2 + 32b = 0$

25 $5d^3 - 60d^2 + 180d = 0$

26 $x^3 - 3x - 2 = 0$

27 $x^3 - 3x + 2 = 0$

28 $x^3 - 2x^2 - 9x = -18$

29 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

30 $n^3 + 8 = 2n^2 + 4n$

31 $x^3 + 3x^2 = 27 + 9x$

بە هۆی گوڕاوێکی نوێ و شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

32 $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

33 $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

34 $y^4 - 18y^2 + 81 = 0$

35 $b^4 - 24b^2 + 144 = 0$

36 $x^5 - 9x^3 + 8x = 0$

37 $b^5 - 28b^3 + 27b = 0$

38 $x^4 - 12x^2 = -36$

39 $x^4 - 14x^2 = -49$

40 $d^4 + 12 = 7d^2$

41 $n^4 + 14 = 9n^2$

42 دەروازەیەك لەسەر ڕۆشەنبیری: خەڵکی عمر خیام وەك شاعیرێکی نووسەری دیوانی چوارینەکان دەناسن، بەڵام هەندێکی کەمیان دەزانن کە ئەم مرۆڤە یەکێك بووە لەو زانایانەی کە لە بیرکاریدا کاریان کردووە. ئەم زانایە ڕێگایەکی پێش خست بۆ دیارکردنی سفرەکانی ئەو نەخشە ڕادەدارانەی بەم شێوەیە دەنووسرێت $f(x) = x^3 - bx - a$ کاتێك کە $b > 0$ و $a > 0$ بەهۆی دۆزینەوەی پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەندێ نەخشەی ناسراو لەگەڵ تەوەرەی سینیەکان.

أ بەهای a و b لەم نەخشەدا چەندە $f(x) = x^3 - 7x - 6$

ب هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە بە بەکارهێنانی بەهاکانی b و a کە لە پرسیاری پێشوودا دۆزیتەوە $y = -\frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ و $y = \sqrt{x^2 + \frac{a}{b}x}$ و $y = -\sqrt{x^2 + \frac{a}{b}x}$

ج جگە لە سفر پۆتانە جیاوازەکانی خاڵی یەکتربڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکانی کە سفری نەخشەی $f(x)$ دەنوێنین دیاریبکە.

د هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $f(x) = x^3 - 7x - 6$ بکێشە و سفرەکانی دیاریبکە ولە ساغکردنەوەی پرسیاری پێشوو دڵنیا بە.

43 **پیشە سازی** سندوقێکی تەختە پانییەکەی x وردرێژییەکەی 3 ئەوەندەی پانییەکەیی وبەرزییەکەش 1ی لە پانییەکەی زیاترە، دڵنیابە لەوەی نەخشەی $V(x) = 3x^3 + 3x^2$ قەبارەی سندوقەکە دەگەیەنێت. دوورییەکانی سندوقەکە دیاری بکە کاتێك قەبارەکەی 36 بێت.



44 **پزیشکی** گولاجێکی ڤیتامین شێوەی لولەکێکی بازنەیی وەستاوی هەیە کە دوو نیوەگۆ لەهەردوو سەرەکانییەتی. ئەگەر نەخشەی $V(r) = 10\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی دەنکە گولاجەکە بنوێنێت کاتێك r نیوەتیرەی بنکەی لولەکەبێت بە مللیمتر. نیوەتیرەی گولاجێك چەندە کاتێك قەبارەکەی 160mm^3 بێت.

ڕوانینێك بۆ دواوە

پۆتانی خاڵە شلۆقەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە، ئەوپەڕی بەهاکانیان بە نزیکراوەی بنووسە، پاشان ناوچەکانی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوون دیاریبکە.

45 $y=6x^2-x-12$

46 $y=2x^2+5x+2$

47 $y=x^2+3x-2$

48 $y=x^3-3x^2+4x-5$

ئەمانەی خوارەوە بە دابەشکردنی بژمێری بدۆزەرەوە.

49 $(3x^4-4x^2+2x-1)\div(x-1)$

50 $(x^4+4x^3+5x^2-5x-14)\div(x+2)$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

51 ئەم بڕە بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن کورتبکەوە $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x}\times\frac{x^2-2x}{x^2-4}$.

پرۆژەی بەش

نموونە* (سامپڵ) چییە؟

What is the Sample?

لەکاتی کارکردنت لەم پرۆژەیەدا ئەو نەخشەڕادە دارانە دەدۆزیتەوە کە دەبنە سامپڵی جۆراوجۆری شێوە دەفرییەکان. هەڵدەستیت بە تێکردنی ئاو بۆ ناو دەفرێك بەقەبارەیەکی دیاریکراو و پێوانی بەرزی وقەبارەکەی، لە هەموو زیادکردنێکدا ئەم تاقیکردنەوەیە دووبارە بکەرەوە تا دەفرەکە پڕ دەبێت، بەمەش کۆمەڵێك جووتی ڕێکخراوی جیاوازت دەست دەکەوێت لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بیاننوێنە.





*سامپڵ = نموونە (نموذج)

چالاکی 1

	بەرزی (Cm)	قەبارە (mm^3)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

1. قەبارەی دەفرەکە دیاریبکە. قەبارەکە دابەش بکە بۆ 10 بەش ئەنجامی دابەشەکە لە نزیکترین ژمارەی تەواو نزیك بکەوە (بۆ نموونە: ئەگەر قەبارەی دەفرەکە $347mm^3$ بێت بە دابەش کردنی بەسەر 10 دا ژمارە 34.7 دەست دەکەوێت نزیکیبکەوە لە 35).
2. 10 جار ئاو بۆ دەفرەکە زیاد بکە، لەهەر جاریکدا قەبارەی زیادکراو($35mm^3$) لە نموونەی پێشوودا گۆڕانەکان کە بەسەر قەبارەی ئاوەکە وبەرزیەکەی دادێت دوای هەموو زیاد کردنێك تۆمار بکە. لەخشتەیەکی وەك خشتەکەی بەرامبەرت گۆرانی قەبارەی ئاوەکە و بەرزیەکەی لە ناو دەفرەکەدا تۆمار بکە. ئەم کردارە تا دەفرەکە پڕ دەبێ دووبارە بکەرەوە.

چالاکی 2

1. پێدراوە تۆمار کراوەکانی خشتەی پێشوو بەکاربهێنە. جووتە ڕێکخراوەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بنوێنە ، وای دابنێ قەبارە x وبەرزی y بێت.
2. پێدراوەکانی خشتەی پێشو لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی (ئەگەر هەبێت) تۆماربکە داوا لە بژمێرەکە بکە دوو سامپلی جیاوازت بداتێ کە جووتە ڕێکخراوەکانی پێشوو بنوێنن. سامپلی یەکەم نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 3 بێت ودووەم نەخشەیەکی دووجابێت.
3. بۆ بەراوردکردنی دوو سامپلەکە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی هەردووکیان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بکێشە.ئەوەیان هەڵبژێرە کە پێت ڕاسترە لەوی تریان(ئەوەی کە نزیکترە لە نواندنی جووتە ڕێکخراوەکە).
4. ئایا دەتوانیت ئەم سامپلە بەکاربێنیت بۆ خەملاندنی بەرزی ئاوی دەفرەکە بە تێکردنی قەبارەی جیاواز لە ئاوی خشتەی پێشوو؟ ڕوونیبکەوە.



4

پێداچوونەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربکە کاتێك $x = 2$ ، $x = -1$.

1 $-x^3 + 4x^2 - 2$

2 $x^3 + 2x^2 - 1$

3 $x^4 - 22$

4 $19 - x^3 - x^2$

کۆکردنەوە یان لێدەرکردن بکە پاشان ئەنجام بە سادەترین شێوە بنووسە

5 $(3x^3 - 5x^2 + 8x + 1) + (11x^3 - x^2 + 2x - 3)$

6 $(7x^3 - 8x^2 + 2x - 3) - (x^3 + x^2 - 6)$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە.ئایا نەخشەکە بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە، بەهای نزیکەییان بنووسە. ناوچەی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوونیان بنووسە.

7 $f(x) = x^2 - 2x + 9$

8 $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

9 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$

10 $f(x) = -2x^3 + x^2 - 9$

لێکبدە پاشان بەسادەترین شێوە بنووسە.

11 $2x^3(5x^4 - 3x + x^2 - 6 - x^3)$

12 $(x+4)(x^3 - 7)(x+1)$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

13 $x^3 + 4x^2 - 5x$

14 $x^3 - 3x^2 - 10x$

15 $x^3 - 125$

16 $27x^3 + 1$

لە جیاتیدانان بەکاردهێنە تاکو بڕیاربدەیت ئایا ڕادەداری یەکەم دابەش دەبێت بەسەر دووەم یان نا؟

17 $(x^3 - 7x^2 + 4x + 12)$ ؛ $(x-2)$

18 $(x^3 - 5x^2 - 11x + 12)$ ؛ $(x+2)$

دابەشبکە

19 $(x^3 + 6x^2 - x - 30)$ ؛ $(x-2)$

20 $(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) \div (x^2 - x - 12)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە وهەموو ڕەگەکانی دیاریبکە.

21 $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

22 $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$

23 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

24 $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە، ئەگەر زانیت ژمارە پێدراوەکە یەکێك لە ڕەگەکانییەتی.

25 $x^3 + 7x^2 + 16x + 12 = 0$ ؛ -3

26 $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$ ؛ -3

27 $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$ ؛ 4

28 $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$ ؛ 6

29 هاوکێشەی $x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0$ شیکاربکە.

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە

30 $3x^3 + 11x^2 - 2x + 1$

31 $8x^5 - 6x^2 + 10x^3$

32 $-x^2 + 8x - 5x^4 - 3$

33 $-2x^2 - x^3 + 7x^4$

4 تاقیکردنەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربکە کاتێك x بەهای 2ـ و 3 وەربگرێت.

1 x^3-2x^2+5

2 x^4-x^2+3x-4

3 $5x^2-3x+1$

4 $7x^3+x^2-2$

ئەم ڕادەدارانە کۆبکەرەوە یان لە یەکیاندەربکە.پلە وژمارەی ڕادەکانی دیارییکە پاش ئەوەی بە شێوەی گشتی بنووسە.

5 $(5x^3-3x^2+x-7)+(3x^2-x-6)$

6 $(2x^5+9x^3-7x+4)-(9x^3+3x^2+4)$

7 پارە پێدان: لە یەکێ لە وولاتەکان حکومەت سندوقێکی تایبەتی دانا بۆ هاندانی کرێکارەکانی. بە کۆکردنەوەی بڕی یارمەتی 5000 دینار لەسەرەتای هەر ساڵێك تاوەکو لە پیریدا سوودی لێوەربگرن، حکومەتیش 7%ی کۆی پارەی دانراوی هەرکرێکارێك بدات، سەرجەمی پارەی دانراوی کرێکارێك چەندە؟ دوای دانانی قیستی پێنجەم.

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە. گەورەترین وبچووکترین بەها بۆ نزیکترین دەیی بدۆزەرەوە. وناوچەی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوونیشیان بۆ دیارییکە.

8 $f(x)=2-2x-x^2$

9 $f(x)=x^3+3x^2+4$

10 $f(x)=x^4-3x^2-4$

11 $f(x)=5-3x^2-x^3$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

12 $5x^4-180x^2$

13 $4x^3-5x^2-8x+10$

14 $2x^3+128$

15 $x^4-7x^3+12x^2$

بەبەکارهێنانی دابەشکردنی ئەقلیدی ئەمانە دابەشبکە.

16 $(2x^4-7x^3-15x^2+8x+12)$ بەسەر $(2x+3)$.

17 (x^3+3x^2-2x-6) بەسەر (x^2-2).

بەبەکارهێنانی دابەشکردنی بژمێری ئەمانە دابەشبکە.

18 $(-x^3+6x^2-11x+6)$ بەسەر $(x-3)$.

19 (x^3+6x^2-27) بەسەر $(x+3)$.

20 پیشە سازی نەخشەی $V(x)=x(14-2x)(32-2x)$ قەبارەی تەختەی لاکێشەتەریب دەنوێنێت. ڕادەداری قەبارەکە بە شێوەی گشتی بنووسە پاشان قەبارەکەی هەژمێر بکە کاتێك $x=3$

ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بدۆزەوە.

21 $-2x^3+7x^2+3x=0$

22 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

23 $x^4-6x^2+8=0$

24 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

25 وزە: سایلۆی غازی شل بە شێوەی لولەکێکی بازنەیی وەستاوە کە هەریەکێ لە سەرەکانی بە نیوە گۆیەك داپۆشراوە.ئەگەر نەخشەی $V(r)=15\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی سایلۆیەك بێت بەمەتر سێجا کە r نیوەتیرەی بنکەکەی بێت، بەهای نزیکەیی قەبارەی سایلۆکە هەژمار بکە کاتێك نیوەتیرەی بنکەکەی $0.5m$ بێت.

ئەم نەخشە ڕادەدارانە بنووسە کە پاسادانی ئەم مەرجانە دەکەن.

26 پلەکەی = 2 ، $f(0)=3$ سفرەکانی 1 و $\frac{3}{7}$

27 پلەکەی = 3 ، $f(0)=-18$ سفرەکانی 3 و 3ـ و 1ـ

28 پلەکەی = 3 ، $f(0)=30$ سفرەکانی 3ـ و 1ـ و و 2 .

4

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام جووتی ڕێکخراو دەبێتە کۆمەڵە شیکاری هەردوو لاسەنگەی $y\ge -x$ ∧ $y\ge 3x+2$ ؟

أ $(1,-5)$ ب $(0,5)$

ج أ و ب پێکەوە د نە أ و نە ب

2 لاری ڕاستەهێڵی $3x+4y=2$ بریتییە لە

أ 3 ب $\frac{3}{2}$

ج $-\frac{3}{4}$ د 4

3 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی $(1,-3)$ دا دەڕوات ئەستوونە لە گەڵ ڕاستەهێڵی $y=2x-2$ کامەیە؟

أ $2y=-x+5$ ب $2y=-x-5$

ج $y=-\frac{1}{2}x+6$ د $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

4 کام لەمانە شیتەڵکردنی ڕادەداری x^2-5x+6 دەنوێنێت؟

أ $(x-2)(x-3)$ ب $(x+2)(x-3)$

ج $(x+1)(x+6)$ د $(x-1)(x-6)$

5 سەری کام لەم نەخشانە بەهای گەورەترین دەنوێنێت.

أ $y=3x^2+5x$

ب $y=7x+5x-3x^2$

ج $y=3+5x+\frac{1}{3}x^2$

د $y=\frac{1}{3}x^2$

6 ژمارەی کۆمەڵە شیکاری سستەمی هاوکێشە سنووردارەکان دەکاتە.

أ سفر ب 1

ج 1 بە لایەنی کەمەوە د ژمارەیەکی نا کۆتایی

7 بەهای $|3.2|-|-2.5|$ ؟ هەژمێر بکە.

8 یەکتربڕینی ڕاستەهێڵی $x-5y=15$ لەگەڵ تەوەری صادی بریتییە لە

أ 15 ب -1

ج 3 د -3

9 کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x+2<2x+1$ بریتییە لە

أ $x\ge 1$ ب $x>2$

ج $x<\frac{1}{3}$ د $x<-\frac{1}{2}$

10 کام لەمانە کۆمەڵەی شیکارە بۆ لاسەنگەی $|x|\le 5$ ؟

أ $-5\le x\le 5$ ب $2\le x\le -2$

ج $5\le x\le -5$ د $-3\le x\le 3$

11 کۆمەڵەی شیکاری سیستمی هێڵی $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ بریتییە لە

أ $(2,3)$ ب $(2,1)$

ج $(-3,2)$ د $(0,1)$

12 ڕادەداری $(x+1)(x+2)(x-4)$ بە شێوەی گشتی بنووسە.

13 ئەم نەخشە دووجایە لەسەر شێوەی بنەڕەتی بنووسە $f(x)=2x^2-8x+9$.

14 کۆبکەوە $(2x^3+3x^2+1)+(5x^2-2x+2)$.

15 لێدەربکە. $(5x^3+4x^2-x)-(x^2+2x-1)$

ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە(ئەگەر توانرا)

16 $-3y^2-5y$

17 $x^2-5x-36$

18 $24x^2+5x-36$

19 $36x^2-46x-12$

20 ئەم هاوکێشە $\frac{x+2}{2}=\frac{2x}{3}$ شیکاربکە.

بەشی پێنجەم

بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

Expressions and Rational Function

1. گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە.
2. نەخشە ڕێژەییەکان
3. لێکدان ودابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
4. کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
5. هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان.
6. نەخشەی ڕەگی دووجا

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 5

بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

Expressions and Rational Function

لەم بەشەدا بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان ونەخشەی ڕەگی دووجا دەخوێنین. بڕە ڕێژەییەکان ئەو بڕانەن کە بەشێوەی ڕێژەی دوو ڕادەدار دەنووسرێت بەڵام نەخشە ڕێژەییەکان ئەو نەخشانەن کە بە هۆی بڕە ڕێژەییەکانەوە پێناسە دەکرێت. نەخشەی ڕێژەیی ونەخشەی ڕەگی دووجا لە زۆر بواری جیاوازدا بەکار دەهێنرێن. وەك فیزیا و کیمیا وئەندازە وئابوری وبازرگانی.





قەبارەی هاوێنە بڕی ئەو گورزە تیشکە دیاریدەکات کە دەچێتە چاوەوە. لە کامێرای فۆتۆگرافییدا کونی هاوێنەکە بڕی گورزە تیشکەکە دیاریدەکات.



وانەکان



دەربارەی پرۆژەی بەش

زۆربەمان دەتوانین ناوەندەی کۆمەڵێك بەها بە ئاسانی هەژمێر بکەین.ناوەندەکان لە زۆر بوارەکانی ژیاندا بەکاردەهێنرێن وەك گۆڕینی دراوی بیانی لە بانکەکاندا، زیادکردنی کرێی کرێکار، بەکاربردنی سوتەمەنی بۆ ئۆتۆمبیل، ناوەندەکانی خێرایی. دەتوانین چەند جۆرێك ناوەندە هەژماربکەین. لەم بەشەدا دوو جۆریان وەردەگرین. ناوەندە ژمێرەیی و ناوەندە گونجاو. پێدراوەکان بەکاردەهێنین بۆ دیاریکردنی ئەو ناوەندەی کە شیاوترە لە هەر بارێکدا.

پاش تەواوبوونی ئەم بەشە توانای ئەمانەت دەبێ کە:

- ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو هەژمار بکەیت بۆ کۆمەڵە پێدراوێك.
- پەیوەندی نێوان ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو دیاریبکەیت.
- شیاوترین ناوەند دیاریبکەیت بۆ هەژمارکردنی کۆمەڵێك پێدراو.

وانەی
1

گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە
Inverse Variation and Inverse Function



ئامانجەکان

- گۆڕانی پێچەوانە دەناسێت و نەگۆڕەکەی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی گۆڕانی پێچەوانە دەنووسرێت.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندیان بە ژیانی رۆژانەوە هەیە وگۆڕانێکی پێچەوانەیان تێدایە.

بۆچی

لەو پەیوەندیانەی کە دوو گۆڕاو پێکەوە دەبەستێتەوە، پەیوەندییەکی وەك رێژەی نێوان گۆڕاوی بەستراو وگۆڕاوی سەربەست نەگۆڕە، لەهەندێ پەیوەندیشدا لێکدانی دوو گۆڕاوەکە نەگۆڕە، یەکەم جۆری پەیوەندی نەخشەیەکی هێڵییە و پەیوەندییەکەی تر جۆرێکە لە نەخشەی رێژەیی نموونەش بۆ ئەوە پەیوەندی نێوان ژمارەی کرێکار وکاتی خایەنراو بۆ تەواوکردنی پرۆژەیەك.

زۆربەی جار لاوەکان خۆبەخشانە هەڵدەستن بە چاندنی دارو دەرخت بۆ سەوز کردنی ناوچە رووتەکان. ژمارەی بەشداربووەکان لە چاندنی دەرختەکاندا رۆڵێکی گرنگی دەبێت لە دیاریکردنی کاتی پێویست بۆ ئەنجامدانی ئەم پرۆژەیە. هەرچەند ژمارەکە زیادبکات، کاتی پێویست کەم دەبێتەوەو بە پێچەوانەوشەوە لەم چالاکیەدا ئەو جۆرە پەیوەندییەت بۆ روونەبێتەوە.

چالاکی 1

دۆزینەوەی گۆڕانی پێچەوانە — **Exploring Inverse Variation**

تیمێکی دێدەوانی بەڵێنیدا درەخت بچێنێت بۆ سەوز کردنی ناوچەیەکی رووت وا دانرا هەر تیمێك لە سەعاتێکدا دە درەخت بروێنێت.

1. یەك تیم چەند کاتی پێویستە بۆ رواندنی هەموو درەختەکان.
2. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 50 تیم بەکارەکە هەستن.
3. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 100 تیم بەکارەکە هەستن.
4. نەخشەیەك بنووسە کاتی خایەنراو بە کاتژمێر T وژمارەی تیمەکان x بێت بۆ رواندنی هەموو درەختەکان.

خاڵی چاودێری ✓

گۆڕانی پێچەوانە Inverse Variation

دوو گۆڕاوی x ، y بە گۆڕانێکی پێچەوانە بەیەك دەبەسترێنەوە، ئەگەر ئەنجامی لێکدانیان بکاتە نەگۆڕێك، بەهاکانیان هەر چەندێك بێت. واتە $xy = h$ کاتێك h ژمارەیەکی ڕاستی بێت جگە لە سفر پێشی دەوترێت نەگۆڕی گۆڕانی پێچەوانە. **Constant of The Inverse Variation Relation**

بەپێی پەیوەندی $xy = h$ ، $h \neq 0$ نابێت هیچ یەکێك لە گۆڕاوەکان بەهای سفر وەربگرێت.

دەتوانین پەیوەندی پێچەوانەکەی پێشوو بەم شێوەیە بنوسین $y = \frac{h}{x}$.

چالاکی 2

دۆزینەوەی نەخشەی هەڵگەڕاوە Exploring The Inverse Function

1. ئەم خشتەیە بنووسەوە وتەواویبکە کاتێك $y = \frac{1}{x}$

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
y									
xy									

شیکاری پرسیار

2. بە دوای شێوازێك بگەڕێ. بەهای y چی لێدێت کاتێك بەهای x زیاد بکات؟ ئەی y چی لێدێت کە x کەمبکات؟

3. هەنگاوی یەکەمی چالاکیەکە دووبارەبکەوە کە $y = \frac{2}{x}$ یان $y = \frac{4}{x}$ ، ئایا بڕوات وایە کە شێوازە دۆزراوەکەی پرسیارەکە بە شیاوی دەمێنێتەوە ئەگەر $y = \frac{3}{x}$ ؟ هەنگاوی یەکەم دووبارە بکەوە کاتێك $y = \frac{3}{x}$.

خاڵی چاودێری ✓

4. پەیوەندی $y = \frac{h}{x}$ چۆن دەگۆڕێت کاتێك $h > 0$ ، کاتێك بەهای x زیاد بکات وهەروەها کاتێك کەمبکات؟

5. ئەگەر $y = \frac{h}{x}$ ، $h > 0$ ئایا دەگونجێت بەهای x سفر بێت؟ ئەوە لێکبدەوە.

ئەگەر بەهای گۆڕاوی x وگۆڕاوی y بزانیت لەو پەیوەندیەی گۆڕانی پێچەوانە دەگەیەنێت ئەوا دەتوانیت بەهای نەگۆڕی h بدۆزیتەوە وهەروەها دەشتوانیت y وەك نەخشەیەك بە پێی x بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{h}{x}$، لەو نموونانەی لە ژیانی ڕۆژانەوە وەردەگیرێن زۆربەی کات بەهای x و y موجەب دەبن.

نموونە 1

ئەگەر گۆڕاوی x و y پێچەوانە بگۆڕێن، $y = 13.5$ کاتێك $x = 4.5$

أ نەگۆڕی گۆڕانەکە بدۆزەوەو هاوکێشەی پەیوەندییەکەی نێوان x و y بنووسە.

ب بەهای y لەم بارانەدا بدۆزەوە کە $x = 0.5$ ، $x = 1$ ، $x = 1.5$، $x = 2$ ، $x = 2.5$،

شیکار

أ $h = xy = 4.5 \times 13.5 = 60.75$ دەتوانیت پەیوەندیەکە بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{60.75}{x}$

ب بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای y بە پێی بەهاکانی x ی دیاریکراو بدۆزەوە.

y	x
121.5	0.5
60.75	1
40.5	1.5
30.375	2
24.3	2.5

هەوڵبدە

x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن کاتێك $y=120$ ئەوا $x=6.5$ نەگۆڕی گۆڕانەکە و هاوکێشەی پەیوەندی نێوان x و y بنووسە پاشان بەهای y هەژمێربکە کاتێك x ئەم بەهایانە وەردەگرێت

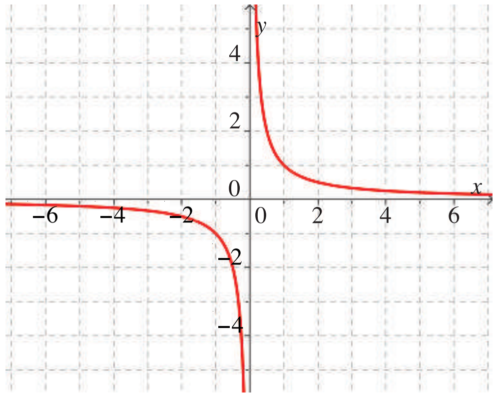
$x=14 \quad x=12.5 \quad x=8 \quad x=4.5 \quad x=1.5$

نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function

کەمێك لەمەوپیش دیتت کە هاوکێشەی $y=\frac{h}{x}$ کاتێك $h\neq 0$ پەیوەندییەکی پێچەوانە دەنوێنێت لە نێوان دوو گۆڕاوی x و y ئەم پەیوەندییەش بە نەخشەی y بە پێی x دەناسرێت. سادەترین جۆری ئەم نەخشەیەش ئەوەیە کاتێك نەگۆڕەکە 1 بێت واتە هاوکێشەکە بەم چەشنە بێت $f(x)=\frac{1}{x}$

نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function

نەخشەی هەڵگەڕاوە ئەو نەخشەیە کە بەم هاوکێشەیە دەردەبڕێت $f(x)=\frac{1}{x}$

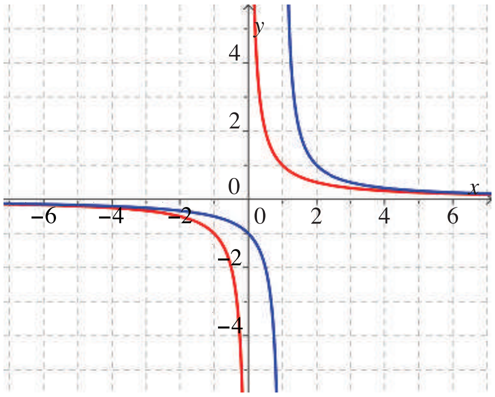


شێوەی بەرامبەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەیە دەنوێنێت ئەگەر بەوردی سەرنجی هێڵکارییەکە بدەیت، تێبینی ئەم خاڵانە دەکەیت :

1. دەتوانیت بەهای y هەژمار بکەین بە پێی x بۆ هەموو بەهاکانی x جگە لە سفر. مانای ئەوەیە بواری نەخشەکە هەموو ژمارە ڕاستیەکانە جگە لە سفر.
2. تا بەهای x زیاد بکات بەهای y کەم دەکات ئەمەش بەوە دەردەبڕین و دەڵێین نەخشەکە ڕوولەکەم بوونە.
3. کاتێك x موجەب بێت وبەهاکەی زیادبکات، بەهای y بە موجەبی دەمێنێتەوە ونزیك دەبێتەوە لە سفر. بەم شێوەیەش دەریدەبڕین نزیکدەبێتەوە لە سفر لەلای موجەب کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە $+\infty$
4. کاتێك x سالب بێت وبەهاکەی کەمبکات، بەهای y بە سالبی دەمێنێتەوە ونزیك دەبێتەوە لە سفر .بەم شێوەیەش دەریدەبڕین. y نزیك دەبێتەوە لە سفر لەلای سالب کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە $-\infty$.
5. y نزیکدەبێتەوە لە سفر کاتێك بەهای ڕووتی x وردە وردە زیاد دەکات. لێرەشدا دەوترێت ڕاستە هێڵی $y=0$ واتە تەوەری x دەرکەناری ئاسۆیی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.
6. هەر چەندە بەها سالبەکانی گۆڕاوی x زیاد بکات، بەهاکانی y بە سالبی دەمێنێتەوە و کەمدەکات لێرەدا دەوترێت y نزیك دەبێتەوە لە $-\infty$ کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە سفر لە لای چەپەوە.
7. هەر چەندە بەها موجەبەکانی گۆڕاوی x کەمبکات، بەهاکانی y بە موجەبی دەمێنێتەوە وزیاد دەکات. لێرەدا دەوترێت y نزیك دەبێتەوە لە $+\infty$ کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە سفر لەلای ڕاستەوە.
8. بەهای ڕووتی y وردە وردە زیاد دەکات کاتێك بەهای ڕووتی x وردە وردە کەم بکات. لێرەشدا دەوترێت ڕاستە هێڵی $x=0$ واتە تەوەرەی y دەرکەناری شاوڵی هێڵی ڕوونکردنەوەیی دەرکەناری نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.

نموونــــه 2

لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەر دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەی و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x-1}$ بکێشە، ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییە چییە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم.



شیکار لە شێوەی بەرامبەردا دەردەکەوێت کە گواستنەوە لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم بەکشانێکی ئاسۆیی بەرەو لای ڕاست بە دووری یەك یەکە دەبێت. تێبینی ئەوە بکە $x=1$ دەرکەناری ستوونی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەمە، کەوێنەی ڕاکێشراوی دەرکەناری ستوونی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە بەراکێشانی ئاسۆیی.

هەوڵبدە لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+1}$ بکێشە، ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییانە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم چییە؟

ڕاهێــــنــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 هاوکێشەیەك بنووسە هەردوو گۆڕاوی x و y بە پەیوەندییەکی گۆڕانی پێچەوانە بەیەکەوە ببەستێ کە نەگۆڕەکەی h بێت. هاوکێشەیەکی تر بنووسە کە ئەوە دەربېرێت.

2 مەبەست چییە کە دەوترێت پەیوەندی نێوان خێرایی وکات گۆڕانێکی پێچەوانەیە. بە نموونە وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

3 x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن $y=3$ کاتێك $x=8$ چۆن بەهای y دەدۆزیتەوە کاتێك $x=2$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن. هاوکێشەیەك بنووسە ئەو پەیوەندییە بنوێنێت.

4 $y=12$ کاتێ $x=60$ **5** $y=3$ کاتێ $x=4$

ئەم خشتانەی خوارەوە بەهای گۆڕاوی x وگۆڕاوی y ی بەرامبەری دیاریدەکات ئایا دوو گۆڕاوەکە پێچەوانە دەگۆڕێن؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە. ئەو هاوکێشەیە بنووسە کە گۆڕانە پێچەوانەکە دەنوێنێت(ئەگەر هەبێت).

6

x	2	3	4
y	12	8	6

7

x	4	15	20	60
y	30	8	6	2

8

x	2	3	4	5
y	10	9	8	7

9

x	5	15	25	75
y	45	15	9	3

راهێنان وجێبەجێکردن

کام لە هاوکێشانە گۆڕانی پێچەوانەیە لە نێوان دوو گۆڕاوەکەدا.

10 $xy = 400$ **11** $y = \frac{-28}{x}$ **12** $y = 10 - x$ **13** $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

14 $x = 10y$ **15** $\frac{x}{5} = \frac{3}{y}$ **16** $x = y$ **17** $y = \frac{42}{x}$

لە پرسیارەکانی 18 تا 23، پەیوەندی نێوان x و y پەیوەندییەکی پێچەوانەیە.

18 $y = 8$ کاتێك $x = 6$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 12$

19 $y = 9$ کاتێك $x = 12$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 36$

20 $y = 3$ کاتێك $x = 32$ بەهای x چەندە ئەگەر $y = 4$

21 $y = 3$ کاتێك $x = -8$ بەهای x چەندە ئەگەر $y = -4$

22 $y = \frac{3}{5}$ کاتێك $x = -60$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 2$

23 $y = \frac{3}{4}$ کاتێك $x = 12$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 27$

بەستنەوە

24 **ئەندازە** سێگۆشەیەك رووبەرەکەی نەگۆڕە. ئەو پەیوەندییە کامەیە کە بنکە وبەرزی بەیەکەوە دەبەستێت؟ئەگەر بەرزییەکەی $36cm^2$ بێت کاتێك بنکەکەی 22cm بێت. درێژی بنکەکەی چەندە کاتێك بەرزییەکەی ببێتە 24cm ؟



25 **ئەندازە:** لاکێشەیەك رووبەرەکەی 36cm بێت. درێژی لاکێشەیەك چەندە کە هەمان رووبەری هەبێت وپانییەکەی 3cm بێت؟ ئەگەر واتادا رووبەری لاکێشەکە نەگۆڕێت، جۆری پەیوەندی نێوان درێژی وپانی دیاریبکە.

26 **میکانیك** پەیوەندی نێوان خێرایی خولانەوەی پەپکێکی دداناوی و ژمارەی ددانەکانی گۆڕانێکی پێچەوانەیە. خێرایی پەپکێك 20 ددانی هەبێت چەندە؟ ئەگەر بزانیت خێرایی خولانەوەی پەپکێکی 16 ددانی 500 خول بێت لە یەك خولەکدا.

گەشت تێکڕای گۆڕانی خێرایی هۆیەکی گواستنەوە وکاتی خایەنراو بۆ برینی ماوەیەکی دیاری کراو پەیوەندیەکی پێچەوانەیە

27 ئامانج ماوەیەکی دیاریکراوی بە 6 کاتژمێر بە تێکڕای $80Km$ لە کاتژمێرێکدا بڕی کاتی پێویست چەندە بۆ برینی هەمان ماوە ئەگەر خێراییەکەی $90Km/h$ بوایە.

28 فرۆکەیەك پێویستی بە 2.7 کاتژمێر هەیە بۆ برینی ماوەی نێوان دووشار بە تێکڕای 1 020 km/h . فرۆکەکە چەند کاتی پێویستە بۆ برینی هەمان دووری، کاتێك تێکڕای خێرایەکەی 810 km/h بێت.

29 **فیزیا** ئەگەر درێژی شەپۆلێکی ڕادیۆ لەرەلەرەکەی پێچەوانە بگۆڕێت، درێژی شەپۆلێك چەندە ئەگەر لەرەلەرەکەی $2000Kh$ بێت.ئەگەر زانیت شەپۆلێك درێژییەکەی $200m$ بێت لەرەلەرەکەی $3000kh$.

30 **مۆسیقا** ئەگەر ژێی عودێك بلەرێتەوە ئەوا دەنگێك دروستدەکات. پەیوەندی نێوان ژمارەی لەرەلەرەکان ودرێژی ژێیەکەی پەیوەندییەکی پێچەوانەیە. درێژی ژێیەك چەندە؟ کاتێك ژێیەکە 370 جار بلەرێتەوە لە چرکەیەکدا. ئەگەر بزانیت درێژی ژێیەك $28cm$ بێت 518 لەرینەوەی هەیە لە چرکەیەکدا؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

هەر یەکە لەم برانە بە توانی موجەب بنووسە.

31 x^{-1} **32** ab^{-3} **33** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$

34 $y^{-2}b^{3}c^{-5}d$ **35** $\left[(x^{-3})^{-2}\right]^{-3}$

پۆتانی سەر و هاوکێشەی تەوەرەی ئەم برگە هاوتایانە بدۆزەوە.

36 $y=-3x^2+5$ **37** $y=x^2+2x-3$ **38** $y=-x^2-5x+6$

39 $y=x^2+2$ **40** $y=x^2+x+1$ **41** $y=2x^2-3x+2$

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە.

42 $3x^5-2x^4+x^2-1$ **43** $2-5x+7x^2-x^3$ **44** $-5x^3-x^4+1$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

45 خشتەیەك بۆ بەهایەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+2}$ دروستبکە بە پێدانی بەهای3− تا 1− بە پلەدارکردنی کە هەر هەنگاوێکی 0.1 بێت.

خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهاکانی y کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە 2− .

وانەی 2

نەخشە ڕێژەییەکان Rational Functions



بۆچی

نەخشە ڕێژەییەکان بەکاردێن بۆ نواندنی گەلێك پەیوەندی ژیانی ڕۆژانەمان زۆر جار ئەم نەخشانە بۆ شیکاری ئەو پرسیارانە بەکاردێنین کە پەیوەندییان بە بەرهەمی ئاوێتە هەیە.

ئامانجەکان

- نەخشە ڕێژەییەکان دەناسێت وبەهاکەی هەژمار دەکات.
- هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی دەکێشێت و بوارەکەی دیاریدەکات و هاوکێشەی دەرکەنارەکانی دیاریدەکات.

ئاسۆ لە تاقیگەیەکی کیمیاییدا کاردەکات. کارەکەی وا پێویست دەکات ڕێژەی سوێری گیراوەیەك ڕێك بخات. ئاسۆ دەتوانێت نەخشەیەکی ڕێژەیی بەکاربهێنێت بۆ نواندنی ڕێژەی سوێری گیراوەیەك.

نموونە 1

جێبەجێ کردنەکان: کیمیا

ئاسۆ گیراوەیەکی 65 ml لایە ڕێژەی سوێرییەکەی 10% یە و x ml ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ زیاد کرد بەمەش گیراوەیەکی نوێی دەستدەکەوێت.

أ) نەخشەی s بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە بە پێی هێندی ئاوە دڵۆپێنراوەکە بێت.

ب) ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە ، ئەگەر ئاسۆ $100\ ml$ زیادبکات؟

شیکار

أ) ئەندازەی خوێ لە گیراوە بنەڕەتیەکە

$$10\% \times 65 = 6.5$$

$$\frac{6.5}{65} \begin{array}{l} \leftarrow \text{خوێ} \\ \leftarrow \text{گیراوە} \end{array}$$

ئەندازەی خوێ لە گیراوە نوێیەکە:

زیادکردنی $x\ ml$ لە ئاوی دڵۆپێنراو

$$\frac{6.5}{65+x} \begin{array}{l} \leftarrow \text{خوێ} \\ \leftarrow \text{گیراوە} \end{array}$$

نەخشەی ڕێژەی سوێری لە گیراوە نوێیەکە:

$$c(x) = \frac{6.5}{65+x}$$

ب) بۆ هەژمێر کردنی ڕێژەی سوێری پاش زیاد کردنی $100\ ml$ لە ئاوی دڵۆپێنراو، هەژمێری بەهای نەخشەکە بکە کاتێك $x = 100$

$$c(100) = \frac{6.5}{65+100} \approx 0.039 \text{ یان } 3.9\%$$

برى ڕێژەيى Rational Expression بريتييە لە ڕێژەى نێوان دوو ڕادەدار. نەخشەى ڕێژەيى Rational Function بە پێى برى ڕێژەيى پێناسە دەكرێت.نەخشەى $c(x)=\frac{6.5}{65+x}$ لە نموونەى 1 دا نەخشەيەكى ڕێژەييە بە پێى برى ڕێژەيى $\frac{6.5}{65+x}$ پێناسە كراوە.

خاڵى چاودێرى ✔ ئايا نەخشەى $f(x)=\frac{x^2+2}{|x|}$ نەخشەيەكى ڕێژەييە؟ ڕوونيبكەوە.

نەخشەى هەڵگەڕاوەى $f(x)=\frac{1}{x}$ سادەترين نەخشەى ڕێژەييەكانە. لەوانەى پێشوودا بينيت بەهاى نەخشەكە هەژمار ناكرێت كاتێك $x=0$. بە شێوەيەكى گشتى بوارى نەخشەى ڕێژەيى هەموو ژمارە ڕاستييەكانە جگە لەو ژمارانەى ژێرە دەكەن بە سفر، ئەو ژمارانەى ژێرە دەكەنە سفر پێيان دەوترێت ژمارە قەدەغەكراوەكان بۆ گۆڕاوى x

نموونە 2 بوارى نەخشەى $f(x)=\frac{x^2-12x+12}{x^2+9x+20}$ دياريبكە.

شيكار

ژمارە قەدەغەكراوەكان دياربكە، ئەويش بە دۆزينەوەى هەردوو ڕەگى هاوكێشەى $x^2+9x+20=0$

$$x^2+9x+20=0$$

$$(x+4)(x+5)=0$$

$$x=-5 \text{ يان } x=-4$$

كەواتە بوارى نەخشەكە هەموو ژمارە ڕاستييەكانە جگە لە -4 و -5 .

هەوڵبدە بوارى ئەم نەخشە $f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ دياريبكە.

دەركەنارە ستوونييەكان Vertical Asymptotes

بيرت بێ نەخشەى هەڵگەڕاوە دەركەنارێكى ستوونى هەيە هاوكێشەكەى $x=0$ و دەركەنارێكى ئاوسۆيى هەيە هاوكێشەكەى دەكاتە $y=0$ بە شێوەيەكى گشتى دەكرێت نەخشەى ڕێژەيى دەركەنارى ئاسۆيى وشاوڵى هەبێت. لەم چالاكيەدا ئەوەمان بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاكى

دۆزينەوەى دەركەنارە ستوونييەكان Exploring Vertical Asymptotes

1. نەخشەى $y=\frac{1}{x-2}$ بەكاربهێنە

أ ئەم خشتەيە بنووسەوە، بە بەكارهێنانى بژمێر تەواويبكە.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
y										

ب ئەم خشتەيە بنووسەوە، بە بەكارهێنانى بژمێرە تەواويبكە.

x	3	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
y										

خاڵی چاودێری ✓

2. y چی بەسەردێت کاتێك x نزیکبێتەوە لە 2 لە لای چەپ وردە وردە؟ ئەی چی بەسەردێت کاتێك x نزیکبێتەوە لە 2 لای ڕاست وردە وردە. پێشبینی بەهای y بەچەند دەکەیت ئەگەر $x=2$.

خاڵی چاودێری ✓

3. ئەگەر $y=\frac{1}{x+3}$ بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای y هەژمێربکە کاتێك نزیکبێتەوە لە 3- لە لای ڕاست پاشان ولای چەپ. چۆن پێشبینی بەهای y دەکەیت ئەگەر $x=-3$

بەو ژمارە ڕاستییانەی کەوا لێناگەرێت نەخشەی ڕێژەیی پێناسە کراوبێت دەوترێت ژمارە **قەدەغەکراوەکان Excluded Values** بۆ ئەو نەخشەیە.

بواری نەخشەی ڕێژەیی بریتییە لە هەموو ژمارە ڕاستییەکان جگە لە ژمارە قەدەغەکراوەکانی ئەو نەخشەیە.

خاڵی چاودێری ✓

بەهای قەدەغەکراوی نەخشەی $y=\frac{x+3}{x^2-x-6}$ دیاریبکە.

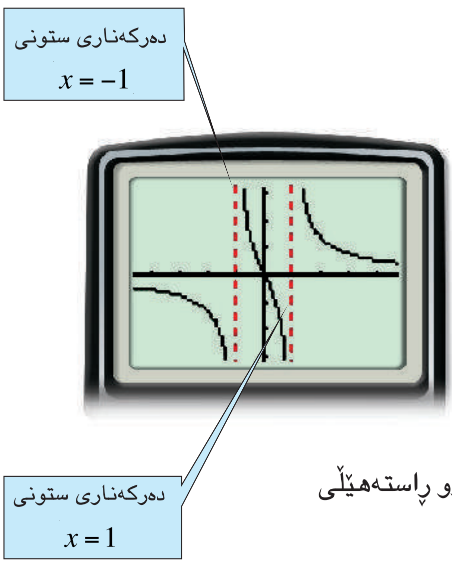
دەکرێت نەخشەی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی لە ژمارەیەکی قەدەغەکراودا هەبێت. مەرجی هەبوونی ئەم دەرکەنارەش بریتییە لە:

دەرکەناری ستوونی Vertical Asymptotes

ئەگەر $a-x$ کۆڵکەیەك بێت لە کۆڵکەکانی ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی و کۆڵکەی سەرە نەبێت ئەوا ڕاستەهێڵی $x=a$ دەرکەناری ستوونی نەخشەکەیە.

نموونە 3

دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بدۆزەوە.



شیکار

ژێرە شیتەڵبکە $y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$

دوو ژمارەی قەدەغەکراوی نەخشەکە بریتین لە -1 و 1

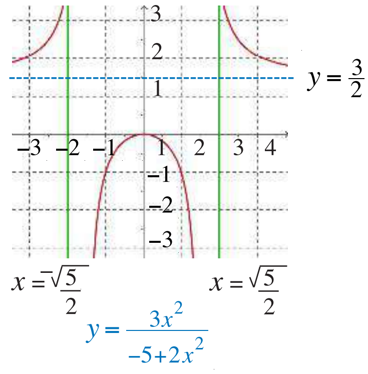
لەبەر ئەوەی هیچ کۆڵکەیەکی ژێرە کۆڵکەی سەرەش نییە بۆیە $x=1$ و $x=-1$ دوو دەرکەناری ستوونی نەخشەکەن.

ساغبکەوە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی وێنەی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بکێشە. دڵنیا بکە کە هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=-1$ دەرکەناری ستوونین.

هەوڵبدە دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2+5x+6}$ بدۆزەوە.

خاڵی چاودێری ✓

نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە سەرەی 1 بێت و ڕاستەهێڵەکانی $x=2$ و $x=-2$ دەرکەنارە ستوونییەکانی بن.



بەسوود وەرگرتن لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{3x^2}{-5+2x^2}$ دەتوانین دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشە ڕێژەییەکە دیاری بکەین. لەوێنەکەوە دەردەکەوێت ڕاستە هێڵی $y=\frac{3}{2}$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە، ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە دەری دەخەن هەتا x دوربکەوێتەوە لە سفر بە ئاراستەی $+\infty$ یان $-\infty$ بەهای y لە $\frac{3}{2}$ نزیک دەبێتەوە.

بەهای x لەسفر دوور دەکەوێتەوە بە ئاراستەی $+\infty$

x	y
10	1.5385
20	1.5094
30	1.5042
40	1.5023
50	1.5015
60	1.501
70	1.5008

بەهای y لە $\frac{3}{2}$ نزیک دەبێتەوە

بەهای x لەسفر دوور دەکەوێتەوە بە ئاراستەی $-\infty$

x	y
−10	1.5385
−20	1.5094
−30	1.5042
−40	1.5023
−50	1.5015
−60	1.501
−70	1.5008

بەهای y نزیک دەبێتەوە $\frac{3}{2}$

ئەگەر پلەی سەرەی نەخشەکە وپلەی ژێرەی نەخشەکە یەکسان بن ئەوا دەتوانیت هاوکۆڵکەی ڕادەی سەرەکییەکان هەردووکیان بەکاربهێنێت (بۆ سەرە 3 و بۆ ژێرە 2) بۆ نووسینی هاوکێشەی دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە $y=\frac{3}{2}$.

دەرکەنارە ئاسۆییەکان Horizontal Asymptotes

- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە بچووکتر بوو ئەوا ڕاستە هێڵی $y=0$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.
- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە گەورەتر بوو ئەوا نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نییە.
- ئەگەر پلەی سەرە وژێرە یەکسانبوون و m هاوکۆڵکەی ڕادەی سەرەکی سەرە و n هاوکۆڵکەی سەرەکی ژێرە بێت، ئەوا ڕاستە هێڵی $y=\frac{m}{n}$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.

نموونە 4

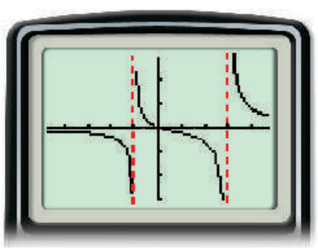
دەرکەنارە ئاسۆیی وستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بدۆزەوە.

شیکار

1. بۆ دۆزینەوەی دەرکەناری ستوونی ژێرە شیتەڵبکە.

$$y=\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{2x}{(x-3)(x+1)}$$

لەبەر ئەوەی هەردوو کۆڵکەکانی ژێرە نابنە کۆڵکەی سەرە کەواتە نەخشەکە دوو دەرکەناری ستوونی هەیە. کەبریتییە لە دوو ڕاستەهێڵی $x=3$ و $x=-1$.



2. لەبەر ئەوەی پلەی سەرە بچووکترە لە پلەی ژێرە، ئەوا نەخشەکە تەنها یەك دەرکەناری ئاسۆیی هەیە کە بریتیە لە ڕاستەهێڵی $y=0$.

ساغبکەرەوە

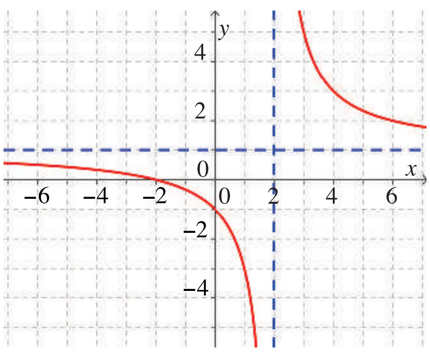
وێنەی هێڵی ڕوونکردنەوەیی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بکێشە و دەرکەنارەکان دیاربکە.

بەکارهێنانی دەرکەنارەکان بۆکێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی
Using Asymptotes to Graph

لە نموونەی 5 دا. ئەوە فێردەبن چۆن دەرکەنارەکان بەکاربێنن بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی.

نموونە 5 هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x+2}{x-2}$ بکێشە ودەرکەنارە ئاسۆیی وستوونییەکانی لەسەر دیاریبکە.

شیکار هاوکێشە دەرکەنارەکان بنووسە پاشان و وێنەی بکێشە، یەك دەرکەناری ستوونی هەیە هاوکێشەکەی $x=2$ ویەك دەرکەناری ئاسۆیی هەیە هاوکێشەکەی $y=1$. خشتەیەك دروستبکە بۆ دیارکردنی ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە.



x	−1	0	1	3	4	5
y	$-\frac{1}{3}$	−1	−3	5	3	$2\frac{1}{3}$

پاشان خاڵەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکەو وێنەکە بکێشە بە گەیاندنی خاڵەکان لەهەر لایەکیدا بە چەماوەیەکی گونجاو.

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن ژمارە قەدەغەکراوەکانی نەخشەیەکی ڕێژەیی دیاریدەکەیت.

2 چۆن دەزانیت کۆڵکەی $x-a$ بۆ ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی دیاریدەکات یان نا.

3 چۆن دەرکەنارەکان بەکاردەهێنێت بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x-5}{x-3}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



4 **کیمیا** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی یەکەمی سەرەتای وانەکە لەسەر ڕێژەی سوێری. هاوکێشەی ئەو نەخشەیە بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دیاریدەکات. کاتێك ئاسۆ $x\ ml$ ئاوی دلۆپێنراو بۆ $90\ ml$ لە گیراوەکە زیاد بکات.بۆ ئەوەی ڕێژەی سوێرییەکەی ببێتە 15% ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دەبێتە چەند؟ ئەگەر ئاسۆ $150ml$ ئاوی دلۆپێنراو بۆ گیراوە بنەڕەتییەکە زیادبکات.

5 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x^2-5}{x^2-7x+12}$ دیاریکە.

دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاریکە.

6 $f(x)=\frac{3x-1}{4x^2-9}$ **7** $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-9}$ **8** $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$

9 هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ بکێشە و هەموو دەرکەنارەکانی دیاریکە.

راهێنان وچێبەجێکردن

ئەم نەخشانە ڕێژەیین یان نا؟ئەگەر ڕێژەیین بوارەکەی دیاربکە،ئەگەر نا هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

10 $f(x)=\frac{x}{2x-7}$ **11** $f(x)=\frac{x+2}{2x}$

12 $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$ **13** $f(x)=\frac{x}{(2x-7)(x+3)}$

14 $f(x)=\frac{5^x}{x^5}$ **15** $f(x)=\frac{|x^2-4|}{|x+2|}$

دەرکەنارەکانی ئەم نەخشە ڕێژەییانە دیاربکە.

16 $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$ **17** $f(x)=\frac{x+2}{2x^2}$

18 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ **19** $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}$

20 $f(x)=\frac{x^2-16}{4-5x+x^2}$ **21** $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

بوار و دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاربکە.

22 $f(x)=\frac{2x-2}{2x+2}$ **23** $f(x)=\frac{2x}{2x(x-5)}$

24 $f(x)=\frac{(3x-1)(x+2)}{x+2}$ **25** $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4x-21}$

26 $f(x)=\frac{3x-1}{9x^2-36}$ **27** $f(x)=\frac{7x+8}{x^2-10x+25}$

28 $f(x)=\frac{5x^2+1}{5x^2+3}$ **29** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

30 $f(x)=\frac{x(x^2-4)}{x^2-7x+6}$ **31** $f(x)=\frac{2x+1}{x^3-27}$

ئەو نەخشە ڕێژەییانە بنووسە کە ئەم دەرکەنارانەیان هەیە.

32 $x=2$ و $y=3$ **33** $x=-2$ و $y=0$

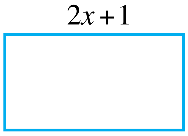
34 $x=1$ و $x=-1$ و $y=2$ **35** $x=2$ و $x=-3$ و $y=-1$

بەرەنگاربونەوە

36 بەهای b لەنەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+b}$ بدۆزەوە کاتێک نەخشەکە تەنها یەک دەرکەنارەی هەبێت، کاتێک نەخشەکە هیچ دەرکەنارێکی نەبێت بەهای b دیاربکە؟

گرێدان

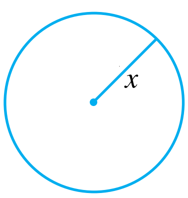
37 ئەندازە لە لاکێشەی بەرامبەردا.



أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی x چەند دەبن کە بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چێوە و ڕووبەر لەتوانادا بێت. بواری ئەو نەخشەیەی نوسیوتە دیاربکە.

38 ئەندازە لە بازنەی بەرامبەردا.



أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی x چەند دەبن بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چیوە و ڕووبەر لە توانادا بێت. بواری ئەو نەخشەی نوسیوتە دیاربکە.

جێبەجێکردنەکان

39 **کیمیا** تارا $x\ ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ $72ml$ لە گیراوەیەك کە ڕێژەی سوێرییەکەی 8% بێت زیادکرد.

أ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە ڕێژەیی سوێری گیراوە نوێیەکە دەنوێنێت.

ب ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە، ئەگەر زانیت تارا $720ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ گیراوەکە زیادکرد.



40 **ئابووری** ژوان دوکانێکی فرۆشتنی گوڵی هەیە خەرجی نەگۆڕی دوکانەکەی حەفتانە 950 هەزار دینارە، خەرجی چەپکە گوڵێك 42.45 هەزار دینارە.

أ نەخشەی g بنووسە کە خەرجی گشتی بنوێنێت لەماوەی حەفتەیەکدا، ئەگەر دوکانەکە x چەپکە گوڵی فرۆشتبێت.

ب نەخشەیەك بنووسە کە خەرجی گشتی هەر چەپکە گوڵێك لەماوەی حەفتەیەکدا بنوێنێت.

41 **فیزیا** هەرچەند مرۆڤ بەرەو بۆشایی ئاسمان بەرزبێتەوە کێشەکەی کەمدەکات. زاناکان پەیوەندییەکیان دۆزیوەتەوە لە نێوان کێشی مرۆڤ W لەسەر زەوی و کێشەکەی لە W_0 بۆشایدا کاتێك لە بەرزی $h\ Km$ بێت بریتییە لە $W(h)=W_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$.

أ نەخشەی W نەخشەیەکی ڕێژەییە، ئەمە ڕوونبکەوە.

ب کێشی مرۆڤێك لەسەر ڕووی زەوی $75\ Kg$ خشتەیەك دروستبکە کێشەکەی بنوێنێت لەبەرزی $10Km$ و $20Km$ و $100Km$ دا.

ج لەبەرزی چەند کیلۆمەترێدا کێشی مرۆڤێك دەبێتە نیوەی کێشەکەی لەسەر زەوی بە نزیکەیی؟

روانینێك بۆ دواوە

ئەمانە شیکاربکە.

42 $|5x-6|>2$ **43** $|x+5|\geq 7$

44 $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\leq \frac{7}{2}$ **45** $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\geq -\frac{7}{2}$

ئەم برانە بە شێوەی گشتی بڕی دووجای ax^2+bx+c بنووسە.

46 $-12x(3x-2)$ **47** $(3x-1)(6x-7)$ **48** $(4-5x)(x-9)$

49 $(x-5)(2x+3)$ **50** $(3x-4)(3x+4)$ **51** $-4(x-3)^2$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

52 $3x^2-6x$ **53** $1-25y^2$ **54** $9x^2-49$

55 $x^2-5x-24$ **56** $x^2+12x+36$ **57** $x^2-16x+64$

روانینێك بۆ پێشەوە

ئەمانە بە شێوەیەکی سادە بنووسە.

58 $\frac{9}{3}$ **59** $\frac{x^2}{x}$ **60** $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

وانەی 3

لێکدان و دابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان

Multiplying and Dividing Rational Expressions

بۆچی

شیکاری هەندێ پرسیار پێویستی بە لێك دان و دابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان هەیە. وەك تێچوون وداهاتی ئاهەنگێك بۆ کۆکردنەوەی پارەتی.



ئامانجەکان

- بڕە ڕێژەییەکان لێکدەدات و دابەشدەکات.
- بڕە ڕێژەییەکان سادەدەکاتەوە.

جێبەجێ کردن

کاری خێراخوازی

بەبۆنەی جەژنی نەورۆز، یەکێك لە ئامادەییەکان ئاهەنگێکی خێرخوازی ساز دەکات بۆ کۆکردنەوەی بڕێ پارە و خەرجکردنی بۆ کەم دەرامەتەکان. خوێندکارانی ڕێکخەری ئاهەنگەکە بڕیاریان دا کۆمەڵێك شاڵ ئامادە بکەن وبەئامادەبووانی بفرۆشن، دوای لێکۆڵینەوە لە داهاتی ئەو پارەیەی لە ئاهەنگەکەوە دەستیان دەکەوێت ئەم ڕێژەیان بەکارهێنا:

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ}}$$

خوێندکاران گەیشتنە ئەو ئەنجامەی کە تێچوونی بەرهەمی x شاڵ دەکاتە $0.8x+25$ بۆیە بڕیاریاندا نرخی هەر شاڵێك بە 3 هەزار دینار دابنێن. پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ لە 1.5% کەمتر نەبێت.

کورتکردنەوەی بڕە ڕێژەییەکان — Symplifying Rational Expressions

بۆ کورتکردنەوەی بڕە جەبرییەکان سەرە وژێرە دابەشی گەورەترین کۆلکەی هاوبەشی هەردووکیان دەکرێت. لەم بارەشدا دەوترێت بڕەکە بە سادەترین شێوەدایە.

نموونە 1

ئەم بڕە کورت بکەوە $\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}$.

شیکار

$$\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-6)(x+6)}$$

سەرەوژێر شیتەڵبکە.

$$=\frac{\cancel{(x+6)}(x+1)}{(x-6)\cancel{(x+6)}}$$

هەریەك لەسەرە و ژێرە دابەشی کۆلکەی هاوبەشبکە.

$$=\frac{x-1}{x-6}$$

تێبینی ئەوە بکە هەر دوو ژمارەی 6 و -6 دوو ژمارەی قەدەغەکراوی بڕە بنەڕەتیەکەیە

هەوڵبدە بڕی $\frac{b^2-49}{b^2-8b+7}$ بەسادەترین شێوە بنووسیت.

Multiplying Rational Expressions لێکدانی برە ڕێژەییەکان

لێکدانی برە ڕێژەییەکان لە لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان دەچێت.

لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان	لێکدانی برە ڕێژەییەکان
$\frac{15}{4}\times\frac{14}{9}=\frac{3\times5}{4}\times\frac{2\times7}{9}=\frac{35}{6}$	$\frac{15}{x^2}\times\frac{4x^4}{21}=\frac{3\times5}{x^2}\times\frac{4x^4}{3\times7}=\frac{20x^2}{7}$

نموونە 2 $\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}=\frac{3\times4\times2\times7}{4\times3\times7\times2\times2}\times\frac{x^3}{x^7}=\frac{1}{2x^4}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{28}{4b^3}\times\frac{4b^5}{21}\times\frac{3}{49b^4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

بۆ لێکدانی دوو بڕی ڕێژەیی، ڕێساکانی لێکدانی کەرتەکان بەکاربێنە

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}\quad b\neq0\quad d\neq0$$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدانەکە بە کورتکردنەوەی کۆڵکە هاوبەشەکانی سەروژێرە سادەبکەیت.

نموونە 3 $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\times\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{x^2-25}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4}{x^2+2x-15}$ سادە بکە.

سەرنجێکی ڕەخنەگرانە زریان بڕی $\frac{2x+3}{5y+3}$ کورتکردەوە بە شێوەی $\frac{2x+3}{5y+3}=\frac{2x}{5y}$ ئایا ڕاستیکردووە؟ ڕوونیبکەوە.

Dividing Rational Expressions دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان

دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان لە دابەشکردنی ژمارەی ڕێژەییەکان دەچێت.

دابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان	دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان
$\frac{6}{8}\div\frac{12}{32}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{4}{2}=2$	$\frac{6}{x^3}\div\frac{12}{x^5}=\frac{6}{x^3}\times\frac{x^5}{12}=\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2$

بۆ دابەشکردنی بڕێکی جەبری بەسەر یەکێکی تر، بڕی یەکەم

لەهەڵگەڕاوەی دووەمیان بدە $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad b\neq0\quad c\neq0\quad d\neq0$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدان کورتبکەیتەوە بە کورتکردنەوەی کۆڵکە هاوبەشەکان لە نێوان سەروژێرە.

نموونە 4

برى $\frac{x-4}{(x-2)^2} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-4}$ سادەبكە.

شيكار

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-4} = \frac{x-4}{(x-2)^2} \times \frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$$

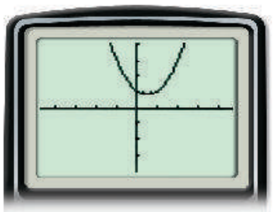
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{x-4}}}{(x-2)\cancel{(x-2)}_1} \times \frac{\overset{1}{\cancel{(x-2)}}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-4)}_1}$$

$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} \text{ يان } \frac{x+2}{x^2-x-2}$$

هەوڵبدە برى $\frac{(x+3)^2}{(x-5)} \div \frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$ بە سادەترين شێوە بنووسە.

بيركردنەوەى ڕەخنە گرانە ئارام برى $\frac{1}{x-5} \div \frac{x-5}{7}$ بەم شێوەيە كورت كردووە. $\frac{1}{\cancel{x-5}_1} \div \frac{\overset{1}{\cancel{x-5}}}{7} = 1 \div 7 = 1 \times \frac{7}{1} = 7$
ئايا ئەوە ڕاستە؟ ئەو ڕوونبكەوە.

شيكارى پرسيارەكان دەتوانين هێڵكارى ڕوونكردنەوەيى بەكار بێنين بۆ زانينى ئەوەى ڕادەرێك شيتەڵ دەبێت يان نا.
بۆ ئەوەى بزانين برێكى وەك x^2-x+1 شيتەڵ دەبێت يان نا هێڵكارى ڕوونكردنەوەيى
نەخشەى $y=x^2-x+1$ بكێشە و دڵنيا بە لەوەى تەوەرەى سينى دەبڕێت يان نا.
لەبەر ئەوەى ئەم چەماوەيە تەوەرەى x نابڕێت واتا نەخشەكە
هيچ سفرێكى نييە لە ژمارە ڕاستييەكاندا بۆيە شيتەڵ نابێت.
لەوەشەوە دەردەكەوێت برى ڕێژەيى $\frac{x^2-x+1}{x^2} \times \frac{x-4}{x-1}$ سادەتر نابێتەوە.



برە ڕێژەييەئاڵۆزەكان — Complex Rational Expressions

برە ڕێژەييە ئاڵۆزەكان.ئەو برانەن كە لەسەرە يان ژێرە يان لەهەردووكياندا برى ڕێژەيى هەبێت.

نموونە 5

برى $\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}}$ بەسادەترين شێوە بنووسە.

شيكار

$\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}} = \frac{4a^2-1}{a^2-4} \div \frac{2a-1}{a+2}$ سەرە دابەش ژێرە بكە.

$= \frac{4a^2-1}{a^2-4} \times \frac{a+2}{2a-1}$ يەكەم لە هەڵگەڕاوى دووەم بدە

$= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-2)(a+2)} \times \frac{a+2}{2a-1}$ شيتەڵبكە

$= \frac{\overset{1}{\cancel{(2a-1)}}(2a+1)\overset{1}{\cancel{(a+2)}}}{(a-2)\cancel{(a+2)}_1\cancel{(2a-1)}_1}$ كۆڵكە هاوبەشەكان كورتبكەوە

$= \frac{2a+1}{a-2}$

هەوڵبدە برى $\dfrac{\frac{(x+2)^2}{x-3}}{\frac{x^2-4}{(x-3)^2}}$ سادەبكە.

بيركردنەوەى ڕەخنەگرانە برى $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{y+x}{y-x}}$ سادە بكە بە بەكارهێنانى هەژمێرى هزرى.

نموونــــــه **6**

بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خوێندکاران پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ نرخی تێچوونەکەی لە 1.5 کەمتر نەبێت؟

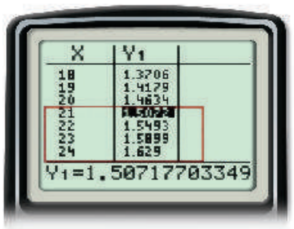
شیکار

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{نرخی تێچوونی یەك شاڵ}} = \frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}}$$

برە ئاڵۆزەکە سادە بکەوە $\frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}} = 3 \times \frac{x}{0.8x+25} = \frac{3x}{0.8x+25}$

نەخشەی $y = \frac{3x}{0.8x+25}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەییدا تۆماربکە.

لەخشتەکەوە دەردەکەوێت خوێندکاران پێویستە بە لایەنی کەمەوە 21 شاڵ بفرۆشن.



ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 لێکدانی برە ڕێژەییەکان ولێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

2 دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان ودابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

3 چۆن ئەم برە ئاڵۆزە کورت دەکەیتەوە $\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{x}{x^2+2x-3}}$ ؟

بەراوردی بەها قەدەغەکراوەکانی x لە برە ئاڵۆزەکە وبەها قەدەغەکراوەکانی برە سادەکراوەکە بکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم برە ڕێژەییانە سادەبکە.

4 $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

5 $\frac{4x^2}{5} \times \frac{30}{x^4} \times \frac{30x^3}{60}$

6 $\frac{x^2+8x+12}{x^2+2x-15} \times \frac{x^2+8x+15}{x^2+9x+18}$

7 $\frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+8} \div \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

8 $\frac{\frac{2x-6}{x^2+9x+20}}{\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}}$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم برە ڕێژەییانە سادەبکە.

9 $\frac{4x^2+8x+4}{x+1}$

10 $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

11 $\frac{15}{x^2} \times \frac{x^5}{12} \times \frac{4}{x}$

12 $\frac{36x}{9x^2} \times \frac{12x^7}{2x} \times \frac{5}{x^2}$

13 $\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$

14 $\dfrac{-x^2-x+6}{x^2-5x+6}$

15 $\dfrac{x}{9x^8}\times\dfrac{x^7}{2x}\times\dfrac{45}{x^4}$

16 $\dfrac{-5}{x^3}\times\dfrac{-x^5}{3}\times\dfrac{-4}{x}\times\dfrac{20}{x^3}$

17 $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$

18 $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

19 $\dfrac{2x^2-2x}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

20 $\dfrac{4x^2+20x}{9+6x+x^2}\div\dfrac{x+5}{x^2-9}$

21 $\dfrac{x^2}{4}\times\left(\dfrac{xy}{6}\right)^{-1}\times\dfrac{2y^2}{x}$

22 $2xy\div\dfrac{2x^2}{y}\div\dfrac{2y^2}{x}$

ئەم برانە سادە بکە.

23 $\dfrac{\dfrac{(x+2)^2}{(x+3)^2}}{\dfrac{x+3}{x+2}}$

24 $\dfrac{\dfrac{x^2-4}{x^2-9}}{\dfrac{(x-2)^2}{(x-3)^2}}$

25 $\dfrac{\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-6x+5}}{\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-7x+10}}$

26 $\dfrac{\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}}{\dfrac{x^2+9x+18}{x^2+7x+10}}$

27 $\dfrac{2x+3}{x-1}\div\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{3x}{2x+3}}$

28 $\dfrac{\dfrac{x+3}{x-1}}{x(x-1)^{-1}}$

29 $\dfrac{1-7x^{-1}-18x^{-2}}{1-4x^{-2}}$

30 $\dfrac{1+12x^{-1}+27x^{-2}}{x^{-1}+9x^{-2}}$

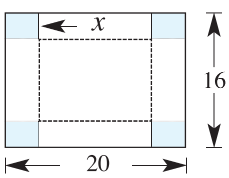
بەرەنگاری

31 بڕێکی ڕێژەیی R بنووسە بە جۆرێك کە پلەی سەرە وژێرەکەی 2 بێت وهـاوکۆڵکەی ڕادە سەرەکیەکەی 1 بێت و پاسادانی ئەم پەیوەندیە بکات:

$$\frac{-10+3x+x^2}{15-18x+x^2}\times R=\frac{x-2}{x-3}$$

گرێدان

32 ئەندازە: لاوەند دەیەوێ کارتۆنێکی سەرکراوە بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی درێژیەکەی 20cm وپانییەکەی 16cm دروستبکات. پێویستە چوار گۆشەی بچووك درێژی لایەکی x cm بێت لەهەر یەك لە سەرەکاندا ببڕێت. پاشان لاکانی بنوشتێنێتەوە.



أ ڕوونبکەوە کە بڕی $x(20-2x)(16-2x)$ قەبارەی قوتووە (سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ب ڕوونیبکەوە کە بڕی $320-4x^2$ ڕووبەری گشتی ناوەوەی قوتووە(سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ج ڕێژەی نێوان قەبارەی قوتووەکە بۆ ڕووبەرە گشتیەکەی بنووسە. ئەو برە سادەبکە.

د ڕێژە دەستکەوتووەکەی پرسیاری پێشوو چۆن دەگۆڕێت ئەگەر x لە سفرەوە تا 4 زیاد بکات؟

جێبەجێکردنەکان

33 **ئابووری** ئالان دوکانێکی بچووکی بابۆڵەی هەیە تێچوونی مانگانەی ئیشپێکردنی 400 000 دینارە تێکڕای تێچوونی یەک بابۆڵەش 4.45 هەزار دینارە.



أ لە لیستی نرخەکانەوە ناوەندە ژمێرەیی بابۆڵەیەك چەندە؟

ب ئەگەر ئالان لە مانگی پێشودا x بابۆڵەی فرۆشتبێت، بڕی (m) بنووسە کە پەیوەندی نێوان تێچوونی گشتی وتێچوونی بابۆڵەکان بنوێنێت.

ج بڕێك بنووسە ڕێژەیی قازانجی ئالان لە فرۆشتنی x بابۆڵە بۆ تێچوونی گشتی دەربخات.

ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکان بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە، کە بەخاڵی پێدراوەکەدا دەڕوات وئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

34 $y=-6x-1$ ؛ $(8,-4)$ **35** $y=\frac{1}{5}x-11$ ؛ $(3,5)$

ئەم بڕانە بە شێوەی گشتی ڕادەدار بنووسە.

36 $x^2(x^3-x^2-6x+2)$ **37** $(x-2)(3x^3-6x-x^2)$

ئەم بڕانە شیتەڵبکە.

38 $8x^2-4x$ **39** $12x^2-3x+6$ **40** $12-4x-22x^2$

41 x^3-1 **42** $125x^3+27$ **43** x^3-6x^2-8x

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەمانە سادەبکە.

44 $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}$ **45** $\frac{3}{x}+\frac{1}{x}$ **46** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}$ **47** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$

وانەی 4

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی برە ڕێژەییەکان

Adding and Subtracting Rational Expressions



بۆچی

بۆ شیکار کردنی زۆر لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانەمان پێویستمان بە کۆکردنەوە و لێکدەرکردنی برە ڕێژەییەکان دەبێت، وەك هەژمارکردنی تێکرای خێرایی لە گەشتێکدا.

ئامانجەکان

- برە ڕێژەییەکان کۆدەکات و لێدەردەکات و ئەنجامەکەی بەسادەترین شێوە دەنووسێت.

جێبەجێکردنەکان

گەشت

تاکسیەك گەشتیارێکی لە فرۆکەخانەوە گواستەوە بۆ ماڵەوەیان بە خێراییەك تێکراکەی 55km/h بێت ولە ڕێگای گەرانەوەی بۆ فرۆکەخانە، بە هۆی قەڵەباڵغی هاتووچۆوەتێکرای خێراییەکەی 45km/h بێت. تێکرای خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە چوون وگەرانەوەدا چەند بووە؟ پێویستیت بە کۆکردنەوەی دوو بری ڕێژەیی دەبێت. نەك ناوەراستی هەردوو خێراییەکە کە لەوانەیە وا بیری لێ بکەیتەوە. کۆکردنەوەی دوو بری ڕێژەیی کە هەمان ژێرەیان هەبێت وەك کۆکردنەوەی دوو ژمارەی ڕێژەیی وایە هەمان ژێرەیان هەبێت.

ژمارە ڕێژەییەکان	برە ڕێژەییەکان
$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$	$\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^2}=\frac{3+5}{x^2}=\frac{8}{x^2}$
ژێرە هاوبەش	ژێرە هاوبەش

نموونە 1

ئەمانە سادەبکە.

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

شیکار

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}=\frac{2x+5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$

تێبینی ئەوە بکە $x=3$ ژمارەیەکی قەدەغەکراوە بۆ گۆڕاوی x لە برە بنەرەتیەکەدا.

هەوڵبدە

ئەمانە سادەبکە.

أ $\frac{3x-1}{2x-1}+\frac{5+2x}{2x-1}$

ب $\frac{2x}{x-5}-\frac{10}{x-5}$

بۆ کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی ژێرە جیاوان، پێویستە ژێرەی هاوبەش دوو ژێرەکە بدۆزیتەوە. بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی بریتیە لە بچووکترین چەند جارەی هاوبەشی ژێرەکان، ڕادەدارێکە بە پلەیەکی کەمتر کە دابەش هەردوو ژێرەکە دەبێت.

دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی لە دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەشی دوو ژمارەی ڕێژەیی دەچێت. بەراوردی بەکارهێنانی ئەم کردارە بکە بۆ ژمارە ڕێژەییەکان وبڕە ڕێژەییەکان.

ژمارە ڕێژەییەکان

$$\frac{7}{300}+\frac{1}{90}=\frac{7}{300}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{90}\times\left(\frac{10}{10}\right)$$
$$=\frac{21+10}{900}=\frac{31}{900}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

بڕە ڕێژەییەکان

$$\frac{7}{3x^2}+\frac{1}{9x}=\frac{7}{3x^2}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{9x}\times\left(\frac{x}{x}\right)$$
$$=\frac{21+x}{9x^2}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان

Adding and Substracting Rational Expressions

بۆ ئەوەی دوو بڕی ڕێژەیی کۆبکەیتەوە ولە یەکتریان دەربکەیت، بچووکترین ژێرەی هاوبەش بدۆزەوە ودوو بڕەکە دووبارە بنووسە وبە بەکارهێنانی بچووکترین ژێرەی هاوبەشیان، پاشان کۆبکەوە یان لێدەربکە وئەنجامە دەستکەوتووەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

نموونە 2

$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x}{x-2}\times\frac{x+2}{x+2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$ بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە $(x-2)(x+2)$

$$=\frac{x(x+2)-8}{(x-2)(x+2)}$$ دوو بڕەکە کۆبکەوە

$$=\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+2)}$$ ژێرە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە

$$=\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$ سەرە شیتەڵبکە

$$=\frac{x+4}{x+2}$$ کورتبکەوە

هەوڵبدە $\frac{x}{x+5}+\frac{-50}{x^2-25}$ کورتبکەوە

خاڵی چاودێری ✔

چۆن شیتەڵکردنی ڕادەدارەکان یارمەتیت دەدات بۆ کۆکردنەوە ولێکدەرکردنی دوو بڕی ڕێژەیی؟ ئەمە بەکردار دیاربکە لە سادەکردنی بڕی $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x^2-6x+9}$

نموونە 3

$\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}$ کورتبکەرەوە.

شیکار

$$\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}=\frac{6x}{3x-1}\times\left(\frac{2x+5}{2x+5}\right)-\frac{4x}{2x+5}\times\left(\frac{3x-1}{3x-1}\right)$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $(3x-1)(2x+5)$

$$=\frac{6x(2x+5)}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{4x(3x-1)}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{12x^2+30x}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{12x^2-4x}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{34x}{(3x-1)(2x+5)}=\frac{34x}{6x^2+13x-5}$$

خاڵی چاودێری ✔ ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە بنەڕەتیەکەدا و ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە سادەکراوەکەدا دیاربکە. ئایا هەمان ژمارەن؟ هۆکەی ڕوونبکەرەوە.

هەوڵبدە $\frac{6}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

هەندێ جار وا پێویست دەکات برە ئاڵۆزەکان بە شێوەی برە ڕێژەییەکان بنووسیتەوە بۆ ئەوەی بتوانیت کۆیان بکەیتەوە ولەیەکتریان دەربکەیت وەک لە نموونەی 4 دادەرکەوێت.

نموونە 4

بڕی $\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

شیکار

$$\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}=\frac{1}{\frac{a+1}{a}}+\frac{1}{\frac{a-1}{a}}$$

لەهەر ژێرەیەك كۆكردنەوەی ولێكدەركردن بكە

$$=1\times\frac{a}{a+1}+1\times\frac{a}{a-1}$$

برە ئاڵۆزەکە بگۆڕە بۆ بڕی ڕێژەیی

$$=\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}$$

$$=\frac{a}{a+1}\times\left(\frac{a-1}{a-1}\right)+\frac{a}{a-1}\times\left(\frac{a+1}{a+1}\right)$$

$$=\frac{a^2-a}{(a+1)(a-1)}+\frac{a^2+a}{(a+1)(a-1)}$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە $(a+1)(a-1)$

$$=\frac{2a^2}{a^2-1}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{a}{a-\frac{1}{a}}-\frac{a}{a+\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

نموونە 5

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، تێکڕای خێرایی تەکسیەکە بدۆزەوە لە ماوەی گەشتەکە (چوون وگەڕانەوە)؟

شیکار باگۆڕاوی d هێمای دووری نێوان فرۆکەخانە ومالَی گەشتیارەکە بێت و t_1 هێمای کاتی خایەنراوی گەشتەکە بێت لە فرۆکەخانە بۆ مالَی گەشتیارەکەو t_2 هێمای کاتی خایەنراوی گەڕانەوە بێت بۆ فرۆکەخانە.

$d = 55 \times t_1$ وهەروەها $d = 45 \times t_2$

بەمەش $t_1 = \frac{d}{55}$ و $t_2 = \frac{d}{45}$

بۆ هەژمێر کردنی تێکڕای گشتی خێرایی، دووری گشتی $2d$ بەسەر کاتی خایەنراوی گشتی $(t_1 + t_2)$ دابەشبکە:

تێکڕای گشتی خێرایی = $\frac{\text{دووری گشتی}}{\text{کاتی گشتی}}$

$v = \frac{2d}{t_1 + t_2}$ لە جیاتی t_1 و t_2 بەهاکانیان دابنێ

$= \frac{2d}{\frac{d}{55} + \frac{d}{45}}$ بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتییە لە 495

$= \frac{2d}{\frac{9d + 11d}{495}}$

$= \frac{2d}{\frac{20d}{495}}$

$= 2d \times \frac{495}{20d}$

$= 49.5$



بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە وا دابنێ خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە چوون akm/h لە کاتژمێرێك بێت وخێراییەکەی لە هاتنەوە bkm/h لە کاتژمێرێك بێت . ڕوونبیکەوە کە تێکڕای خێرایی $\frac{a+b}{2}$ نییە.

ڕاهێــــنــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 چۆن بچووکترین ژێرەی هاوبەش دەدۆزێتەوە بۆ کۆکردنەوەی $\frac{x-1}{x^2-36} + \frac{x+5}{x^2-7x+6}$ ؟

2 لەم چوار برانە دوو بڕی یەکسان هەڵبژێرە.

أ $\frac{3+7}{x^2+4}$ ب $\frac{10}{x^2} + \frac{10}{4}$ ج $\frac{3}{x^2} + \frac{7}{4}$ د $\frac{3}{x^2+4} + \frac{7}{x^2+4}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم برانە کورتبکەوە.

3 $\frac{3x}{x-1}+\frac{2}{x-1}$

4 $\frac{3x+5}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$

5 $\frac{12}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}$

6 $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x+1}{x-1}$

7 $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$

8 گەشت بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە، تێکرای گشتی خێرایی تەکسیەکە هەژمار بکە، ئەگەر تێکرای خێرایی چوون $52Km$ لە کاتژمێرێك و تێکرای خێرایی گەڕانەوە $38Km$ لە کاتژمێرێك بێت.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم برانە کورتبکەوە.

9 $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{6x+5}{x+1}$

10 $\frac{7x-13}{2x-1}+\frac{x+9}{2x-1}$

11 $\frac{n+9}{4}+\frac{n-3}{2}$

12 $\frac{x+7}{3}-\frac{4x+1}{9}$

13 $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}$

14 $\frac{2x}{x+3}-\frac{x-3}{x^2+6x+9}$

15 $\frac{-4}{x-5}+\frac{5}{x+3}$

16 $\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x-2}$

17 $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$

18 $\frac{8}{3x-5}+\frac{7}{2x+3}$

19 $\frac{2x+3}{x+3}+\frac{x}{x-2}$

20 $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{2x}{x-1}$

21 $x^2+\frac{2x}{3x-5}$

22 $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{x-1}$

23 $2x^2-1-\frac{x-1}{x+2}$

24 $\frac{3}{\frac{2x-1}{x}}$

25 $\frac{1}{\frac{3x+1}{2}}$

26 $\frac{\frac{4}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}+\frac{3}{x-1}$

27 $\frac{\frac{4}{x+2}}{\frac{x+2}{3}}-\frac{3}{x+2}$

28 $\frac{\frac{x+2}{x+5}}{\frac{x-1}{x+5}}+\frac{1}{x+1}$

29 $\frac{\frac{2x+10}{x-1}}{\frac{x+5}{x^2-1}}-\frac{4}{x+1}$

30 $\frac{1-xy^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

31 $\frac{x-y}{x^{-1}-y^{-1}}$

32 $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+2(xy)^{-1}+\frac{1}{y^2}}$

ئەم برانە بۆ بڕی ڕێژەیی بگۆڕە وبەسادەترین شێوە بینووسە.

33 $\frac{3x}{x-1}+\frac{5x+2}{x-1}-\frac{10}{x-1}$

34 $\frac{7x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{6}{x^2-1}$

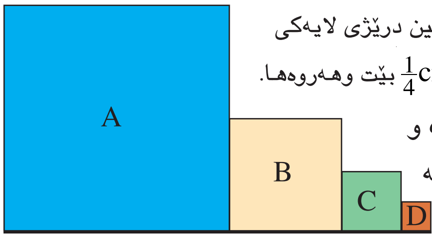
35 $\frac{7}{x+7}+\frac{-x}{x-7}-\frac{2x}{x^2-49}$

36 $(x-y)^{-1}-(x+y)^{-1}$

37 $(x-y)^2-(x+y)^{-2}$

38 $\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x+y}$

39 ئەندازە: لەم شێوەی بەرامبەردا چەند چوارگۆشەیەك دەبینین درێژی لایەكی چوار گۆشەی یەكەم $1cm$ ودووەمیان $\frac{1}{2}$cm وسێیەمیان $\frac{1}{4}$cm بێت وهەروەها.



أ سەرجەمی رووبەری چوار گۆشەكان a و b و c و d، بە بەكارهێنانی هێزەكانی ژمارە 2 بنووسە

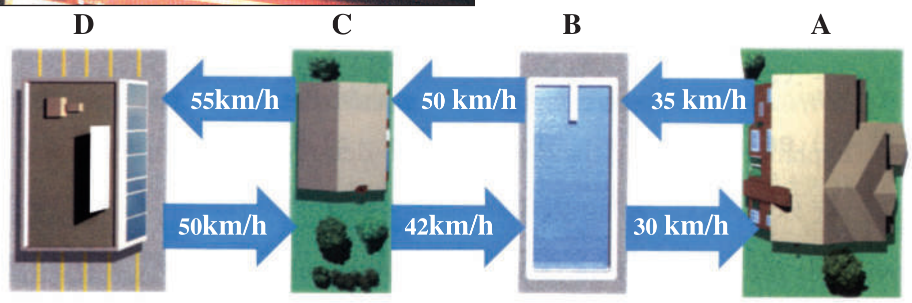
ب سەرجەمەكە بە یەك ژمارەی رێژەیی بنووسە.

ج ئەگەر دوو چوارگۆشەی نوێی e و f بۆ شێوازەكە زیادكرا. سەرجەمی رووبەری شەش چوار گۆشەكە لە a هەتا f بدۆزەوە بە شێوەی یەك ژمارەی رێژەیی.

د وەڵامەكانی ب و ج بگۆڕە بۆ ژمارەیەكی دەیی لە پێكهاتبێت لە 4 رەنووس لە پاش فارزە. ئایا دەتوانیت كەرتێك بخەملێنیت كە نزیكبێت لە سەرجەمی رووبەری چوار گۆشەكان هەرچەند چوار گۆشەكان زیادبكەین؟ ئەم كەرتە چییە؟

40 **گەشت** ئەم هێڵكارییەی خوارەوە قۆناغەكانی گەشتێك بە ئۆتۆمبیل دیاردەكات. دووری نێوان A و B ونێوان B و C ونێوان C و D یەكسانن. لەهێڵكارییەكە تێكرای خێرایی ئۆتۆمبیلەكە لەهەر قۆناغێكدا دیاریكراوە.





أ تێكرای گشتی خێرایی گەشتی A بۆ C هەژمێربكە وبەپێچەوانەوە.

ب تێكرای گشتی خێرایی گەشتی B بۆ D هەژمێربكە وبەپێچەوانەوە.

ج تێكرای گشتی خێرایی گەشتی A بۆ D هەژمێربكە وبەپێچەوانەوە.

روانینێك بۆ دواوە

بڕی جیاكەرەوەی ئەم هاوكێشانە هەژمێربكە وژمارەی ڕەگەكانیان لە كۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەكان دیاریبكە وهاوكێشەكانی شیكاربكە.

41 $0 = x^2 - 3x + 4$ **42** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **43** $-2x^2 - 5x + 12 = 0$

روانینێك بۆ پێشەوە

44 هەموو شیكارەكانی هاوكێشەی $1.4 = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1}$ دیاریبكە. لەبیرنەكەیت ژمارە قەدەغەكراوەكانی x لە برە رێژەییەكە لابدەیت.

وانەی 5

هاوکێشەکان ولاسەنگە ڕێژەییەکان

Rational Equations and Inequalities



ئامانجەکان

- هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان بە جەبری و بە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان شیکار دەکات.

بۆچی

زۆر شێوازی جۆراجۆر هەیە بە هاوکێشە یان لاسەنگەیەکی ڕێژەیی دەنوێنرێت. بۆ نموونە دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنوسین بۆ دۆزینەوەی تێکڕایی خێرایی گشتی لە پێشبڕکێیەکی سیانی.

جێبەجێ کردن

پێشبڕکێی سیانی

زۆرزک پێشبڕکێیەکی سیانی کە بریتیبوو لە مەلەوانی وپاسکیل سواری و ڕاکردن بە دوو کاتژمێر و نیو تەواوکرد. تێکڕای خێراییەکەی لە پاسکیل سواریەکەدا، ئەوەندەی تێکڕای خێراییەکەی بێت لەمەلەکردندا. تێکڕای خێرایی ڕاکردنەکەی $5Km/h$ زیاتر بێت لە تێکڕای خێرایی مەلەکردنەکەی. دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنووسیت بۆ هەژمێر کردنی تێکڕایی خێرایی گشتی زۆرزک لەپێشبڕکێکەدا. هاوکێشە ڕێژەییەکان ئەو هاوکێشانەن کە بە لایەنی کەمەوە بڕێکی ڕێژەیی تێدایە.

	دووری Km	خێرایی Km/h	کات
مەلەکردن	$d_s = 0.5$	x	t_s
پاسیکل سواری	$d_b = 25$	$6x$	t_b
ڕاکردن	$d_r = 6$	$x+5$	t_r

نموونە 1 تێکڕای خێرایی گشتی زۆرزک هەژمێربکە.

شیکار

1. کاتی خایەنراوی هەر قۆناغێك هەژماربکە.

قۆناغی مەلەکردن	قۆناغی پاسکیل سواری	قۆناغی ڕاکردن
دووری = خێرایی × کات	دووری = خێرایی × کات	دووری = خێرایی × کات
$0.5 = xt_s$	$25 = (6x)t_b$	$6 = (5+x)t_r$
$\frac{0.5}{x} = t_s$	$\frac{25}{6x} = t_b$	$\frac{6}{x+5} = t_r$

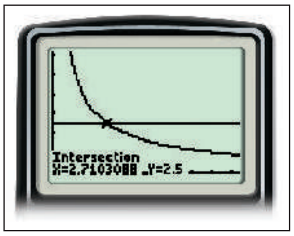
2. بڕێکی ڕێژەیی بنووسە کە کاتی خایەنراوی گشتی پێشبڕکێیەکە بنوێنێ بە پێی تێکڕای خێرایی زۆزك لە مەلەکردن x.

$$T(x)=t_s+t_b+t_r=\frac{0.5}{x}+\frac{25}{6x}+\frac{6}{x+5}$$

$$=\frac{0.5}{x}\times\frac{6(x+5)}{6(x+5)}+\frac{25}{6x}\times\frac{(x+5)}{(x+5)}+\frac{6}{x+5}\times\frac{6x}{6x}$$

$$=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $6x(x+5)$



هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ شیکاربکە.

وێنە نەخشەی $y=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$ بکێشە.

$y=2.5$ پۆی خاڵەکانی یەکتربڕین دیاریبکە.

تێکڕای خێرایی گشتی زۆزك $2.7Km/h$ بووە بە نزیککراوەیی.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چۆن هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ شیکار دەکەیت بە بەکارهێنانی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا؟

نموونە 2

هاوکێشەی $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$ شیکاربکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم: بەجەبری

$x\neq 4 \quad x\neq 6$

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$x(x-4)=1\times(x-6)$$

$$x^2-4x=x-6$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x=3 \qquad x=2$$

ساغبکەوە

ئەگەر $x=2$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{2}{2-6}=\frac{1}{2-4}$$

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$ ڕاستە

ئەگەر $x=3$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{3}{3-6}=\frac{1}{3-4}$$

$$-1=-1$$ ڕاستە

کەواتە 2 و 3 دوو شیکاری هاوکێشەکەن.

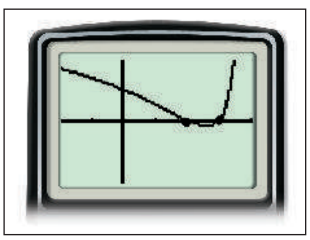
ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەکتربڕینی چەماوەی نەخشەی $y=\frac{x}{x-6}$ وچەماوەی نەخشەی $y=\frac{1}{x-4}$ کارێکی گرانە پێویستە ڕێگایەکی تر بەکاربهێنیت.

هاوکێشەکە بە شێوەی $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$

پاشان $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}=0$ بنووسە.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}$ بکێشە وپۆی سینی خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی سینی دیاربکە.



هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{x}{3}=\frac{1}{x-2}$ شیکاربکە هەندێ جار شیکاری هاوکێشە ڕێژەییەکان، شیکاری نامۆی لێدەکەوێتەوە، پاسادانی هاوکێشە بنەڕەتیەکە ناکات. لێرەوە پێویستی پاسادانی بەها پەیدا بوەکانت بۆ دەردەکەوێت کە دەبنە شیکاری هاوکێشەکە.

نموونە 3

هاوکێشەی $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$ شیکاربکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم: بە جەبری

هەردوو لای هاوکێشەکە لە بچووکترین ژێرەی هاوبەشی $(x-3)(x+3)$ یان x^2-9 بدە.

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$$ کاتێك $x\neq\pm3$.

$$\frac{x}{x-3}\times(x-3)(x+3)+\frac{2x}{x+3}(x-3)(x+3)=\frac{18}{x^2-9}(x-3)(x+3)$$

$$x(x+3)+2x(x-3)=18$$

$$x^2+3x+2x^2-6x=18$$

$$3x^2-3x-18=0$$

$$3(x^2-x-6)=0$$

$$3(x-3)(x+2)=0$$

$x=3$ یان $x=-2$

ساغیبکەوە

لەبەر ئەوەی دوو ژمارەی 3 و 3– قەدەغەکراون، ئەوا $x=3$ شیکارێکی نامۆیە وپێویستە فەرامۆش بکرێت. بەڵام ئەگەر $x=-2$ ئەوا :

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{x^2-9}$$

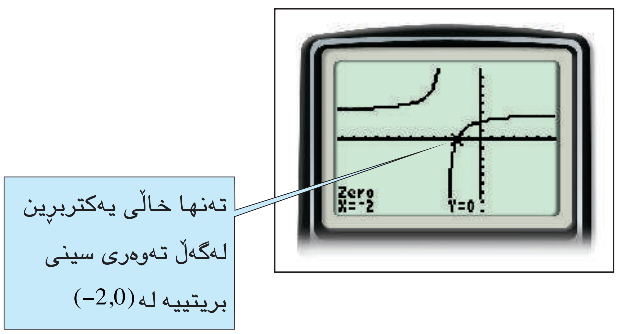
$$\frac{-2}{-2-3}+\frac{2(-2)}{-2+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{(-2)^2-9}$$

$$-\frac{18}{5}=-\frac{18}{5}$$ دروستە

ڕێگای دووەم: بەڕوونکردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەکتربڕینی هەردوو چەماوەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}$ و $y=\frac{18}{x^2-9}$ کارێکی گرانە بۆیە پێویستە ڕێگایەکی تر بەکاربێنێت $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$ بنووسە.

پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}$ بکێشە.



هاوکێشەکە تەنها یەك شیکاری هەیە. بریتیە لە $x=-2$

هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x^2-5x+6}$ شیکاربکە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی لە نموونەی 3 دا شیکارێکی نامۆمان بۆ دەرچوو؟ هۆکەی ڕوونبکەرەوە.

لاسەنگە ڕێژەییەکان Rational Inequalities ئەو لاسەنگانەن بە لایەنی کەمەوە بڕێکی ڕێژەییان تێدایە.

چالاکی

شیکارکردنی لاسەنگە ڕێژەییەکان — Solving Rational Inequalities

خاڵی چاودێری ✓

1. لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا. هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1=\frac{x+2}{x-4}$ و $y_2=2x-11$ بکێشە.
2. بەهاکانی x کامانەن کە پاسادانی $y_1=y_2$ ؛ $y_1<y_2$ ؛ $y_1>y_2$ دەکەن
3. چۆن بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4}<2x-11$ و لاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4}>2x-11$ شیکار دەکەیت؟

نموونە 4 لاسەنگەی $\frac{x}{2x-1}\le 1$ شیکاربکە.

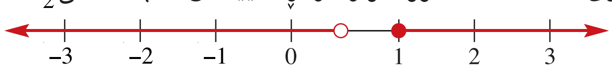
شیکار

ڕێگای یەکەم: بە جەبری

هەوڵبدە بە لێکدانی هەردوولای لاسەنگەکە لە $2x-1$ خۆت لە ژێرە ڕزگار بکەیت بەڵام لێکدانی لاسەنگە لە ژمارەیەك لەوانەیە ئاراستەی لاسەنگەکە هەڵبگەڕێتەوە. بۆیە پێویستە لە دوو بارەدا لێبکۆڵینەوە. کاتێك $2x-1$ موجەب بێت، کاتێك $2x-1$ سالب بێت.

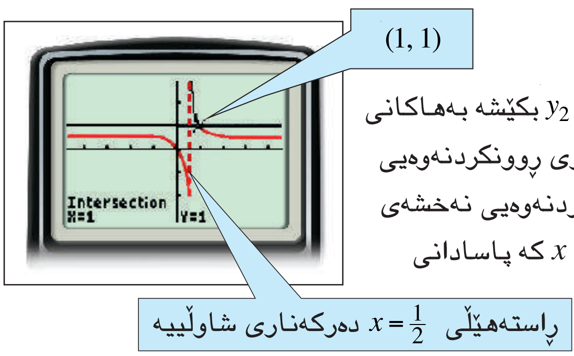
کاتێك $2x-1>0$ موجەب بێت	کاتێك $2x-1<0$ سالب بێت
$\frac{x}{2x-1}\le 1$	$\frac{x}{2x-1}\le 1$
$x\le 2x-1$	$x\ge 2x-1$ (≤ گۆڕا بۆ ≥)
$-x\le -1$	$-x\ge -1$
$x\ge 1$ (≤ گۆڕا بۆ ≥)	$x\le 1$ (≥ گۆڕا بۆ ≤)
لەم بارەدا کاتێك $2x-1>0$ ئەوا $x>\frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی x کەپاسادانی لاسەنگەکە دەکەن، پێویستە پاسادانی $x>\frac{1}{2}$ و $x\ge 1$ پێکەوە بکەن.	لەم بارەدا کاتێك $2x-1<0$ ئەوا $x<\frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی x کە پاسادانی لاسەنگەکە دەکەن پێویستە پاسادانی $x<\frac{1}{2}$ و $x\le 1$ پێکەوە بکەن.
{کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x\ge 1$ ساغدەکاتەوە}	{کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x<\frac{1}{2}$ ساغدەکاتەوە}

کەواتە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە هەموو ئەو ژمارە ڕاستییانەن کە پاسادانی $x<\frac{1}{2}$ یان $x\ge 1$ دەکەن



ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لە ڕووتەختی پۆتانادا هەردوو هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1=\frac{x}{2x-1}$ و $y_2=1$ بکێشە بەهاکانی x لەوناوچەیەدا دیاربکە، کە تیایدا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی یەکەم دەکەوێتە ژێر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم. کۆمەڵە شیکار بریتییە لە بەهاکانی x کە پاسادانی $x<\frac{1}{2}$ یان $x\ge 1$ دەکەن.



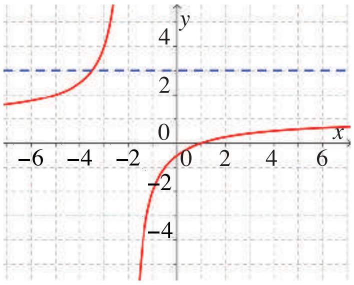
هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{x-1}{x+2}<3$ شیکاربکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 مانای چییە یەکێك لە شیکارەکانی هاوکێشەیەکی ڕێژەیی نامۆیە؟چۆن دەیناسیتەوە؟

2 چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەکاردەهێنیت بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی ئەو شیکارەی بە جەبری بەدەستهێناوە؟



3 چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x-1}{x+2}$ ونەخشەی $y_2 = 3$ لە وێنەی بەرامبەردا بەکاردێنیت بۆ شیکاری لاسەنگەی $\frac{x-1}{x+2} > 3$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **وەرزش** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خێرایی زۆرك لە هەریەکە لە مەلەوانی و پاسکیل سواری و ڕاکردندا چەندە؟ ئەگەر ماوەی پێشبڕکێکە بە دووکاتژمێر تەواو بکات.

ئەمانە شیکاربکە.

5 $\frac{2x-1}{x} = \frac{3}{x+2}$

6 $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-4}{x^2-1}$

ئەمانە شیکاربکە.

7 $\frac{2x-3}{x} \geq 2$

8 $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+3}$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەمانە شیکاربکە و ڕاستی شیکارەکەت ساغبکەوە.

9 $\frac{x+3}{2x} = \frac{5}{8}$

10 $\frac{2y-1}{4y} = \frac{4}{6}$

11 $\frac{4}{n+4} = 1$

12 $\frac{-6}{m-3} = 1$

13 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{8} = \frac{4}{3x}$

14 $\frac{1}{a} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3a}$

15 $\frac{y+3}{y-1} = \frac{y+2}{y-3}$

16 $\frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2n-8}{3n+8}$

17 $\frac{x+3}{x} + 1 = \frac{x+5}{x}$

18 $\frac{2x}{x+3} - 1 = \frac{x}{x+3}$

19 $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x} = \frac{x}{x+1}$

20 $\frac{3}{x+2} - \frac{x}{1} = \frac{4}{3}$

21 $\frac{1}{6} - \frac{1}{x} = \frac{4}{3x^2}$

22 $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{4}$

23 $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$

24 $\frac{x-4}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{17}{x^2-4}$

25 $\frac{a}{a+3} - \frac{a}{a-2} = \frac{10}{a^2+a-6}$

26 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x}{x-6} = \frac{5x^2-15x+20}{x^2-7x+6}$

27 $\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} = \frac{-1}{x-2}$

28 $\frac{x+2}{2x-3} - \frac{x-2}{2x+3} = \frac{21}{4x^2-9}$

ئەمانە شیكار بكە وپاشان ساغیبكەوە.

29 $\frac{x+3}{3x} > 2$ **30** $\frac{y+5}{4y} > 3$ **31** $\frac{x-5}{3x} < -3$

32 $\frac{x-5}{3x} < 3$ **33** $\frac{2x+1}{x-2} > 4$ **34** $3 < \frac{3x+4}{1+2x}$

35 $\frac{x+1}{x} \le \frac{1}{2}$ **36** $-\frac{1}{2} \ge \frac{1}{x-4}$ **37** $\frac{7x}{3x+2} < 2$

ئەم لاسەنگانە شیكار بكە وەڵامەكەت بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

38 $x^2 < \frac{1}{2}$ **39** $\frac{1}{x} \le x - 1$ **40** $\frac{x-2}{x-1} \ge 2x$

بەرەنگاربونەوە

41 بەهزری لاسەنگەی $\frac{3}{(x-1)^2} > 0$ شیكار بكە.

42 دەروازەیەك لە رۆشنبیری هندی لە سەدەی ١٩ دا زانای بیركاری هندی ماهافیرا ئەم پرسیارەی دانا. چوار بۆری ئاو رووەدەكەنە ناو حەوزێكەوە. یەكەمیان بە تەنها حەوزەكە بە نیو سەعات پڕ دەكات، دووەم بە تەنها بە سێیەكی سەعاتێك و سێیەم بە چارەكە سەعاتێك وچوارەم بە پێنجیەكی سەعاتێك پڕی دەكات. كاتی پێویست چەندە ئەگەر هەموویان بەیەكەوە ئاو رووبكەنە ناو حەوزەكە؟ هەریەكێكیان بڕی چەند ئاو دەكەنە حەوزەكەوە؟

بەستنەوە

43 ئەندازە درێژی لاكێشەیەك 5 مەتری زیاترە لە پانیەكەی. درێژی وپانی لاكێشەكە هەژمێر بكە ئەگەر رێژەی درێژەیەكەی بۆ پانیەكەی كەمتر نەبێ لە 1.5 وزیاتر نەبێ لە 3.

جێبەجێكردنەكان

44 وەرزش ئاراس بەشداری پێشبركێیەكی سیانی كرد. $0.6Km$ بە مەلە و $15Km$ بەسواری پاسكیل و $8Km$ بەڕاكردن بڕی. تێكڕای خێراییەكەی لە پاسكیلەكەدا 9 ئەوەندەی تێكڕایی خێراییەكەی بوو لە مەلەكردندا. تێكڕایی خێراییەكەی لە ڕاكردندا $6Km/h$ لە تێكڕایی خێرایی مەلەكردنەكەی زیاترە.

أ نەخشەیەكی رێژەیی بنووسە بە پێی خێراییەكەی لە مەلەكردندا. ئەوكاتە بنوێنێت كە ئاراس دەیخایەنێت بۆ بڕینی دووری پێشبركێكە.

ب تێكڕای خێرایی ئاراس لە مەلەكردن وسواری پاسكیل وڕاكردندا چەند بووە؟ ئەگەر زانیت بە یەك كاتژمێر ونیو پێشبركێكەی تەواو كردوە.

45 فیزیا نەخشەی $w(h) = w_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$ كێشی تەنێكە لە بەرزی $h\ Km$ لە بۆشایی ئاسماندا. w_0 كێشی هەمان تەنە لەسەر زەوی. بەرزی ئەو مانگە دەستكردە چەندە؟ كێشەكەی $200\ Kg$ لە بۆشایی ئاسماندا و $3500\ Kg$ لەسەر زەوی بێت.

روانینێك بۆ دواوە

بەهای ئەم برانە هەژماربكە.

46 $81^{\frac{1}{2}}$ **47** 13^0 **48** $9^{\frac{3}{2}}$ **49** $27^{\frac{1}{3}}$

روانینێك بۆ پێشەوە

50 بە بەكارهێنانی بژمێری روونكردنەوەیی وێنەی نەخشەی $f(x) = \sqrt{x}$ بكێشە. وێنەی ئەو نەخشەكەیە بەوێنەدانەوە بە دەوری تەوەری x دا پێكبهێنە. تێبینی چی دەكەیت؟

نەخشەی ڕەگی دووجا Radical Functions

وانەی
6

ئامانجەکان

- نەخشەی ڕەگی دووجا دەناسێت و هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت.
- بەهای بڕی ڕەگی دووجا هەژمێردەکات.

بۆچی

نەخشەی ڕەگی دووجا بەکاردێت بۆ نواندنی چەندها پەیوەندی لەژیانی ڕۆژانەماندا وەك ئەو پەیوەندییەی کە درێژی بەندۆل دەبەستێتەوە بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی بەندۆلەکە.

جێبەجێ کردنەکان

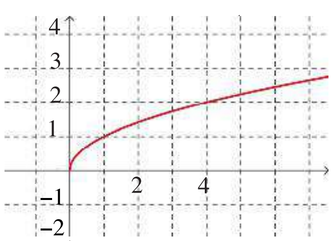
فیزیا



نەسرین تێبینی ئەوەی کرد کە لەرەی تەواوی بەندۆلێکی درێژ کاتێکی زیاتری پێویستە لە لەرەی تەواوی بەندۆلێکی کورت. بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی بەندۆلێك دەوترێت خولی بەندۆل. نەخشەی $t(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ خولی بەندۆل بە چرکە بە پێی درێژییەکەی بەمەتر دەنوێنێت خولی بەندۆلێك چەندە درێژییەکەی $0.1m$ و $0.2m$ و $0.3m$ بێت؟

نەخشەی ڕەگی دووجا Square - Root Function

لەبیرت بێت ڕەگی دووجای ژمارەی x بریتییە لە ژمارەیەك ئەگەر لە خۆی بدرێت ژمارەکەت دەستدەکەوێت. هەروەها لەبیرت بێت ژمارەی سالب ڕەگی دووجای نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا وهەموو ژمارەیەکی موجەبی وەك x دوو ڕەگی دووجای هەیە یەکێکیان موجەبە بە $\sqrt{x}$ دەنووسرێت وئەوی تریان سالبە و بە $-\sqrt{x}$. نەخشەی ڕەگی دووجا نەخشەیەی بە ڕێسای $f(x)=\sqrt{x}$ دەناسرێت. بە پێی بابەتەکانی پێشوو بواری ئەم نەخشەیە هەموو ژمارە ڕاستییە ناسالبەکانە و مەوداکەشی هەمان کۆمەڵە ژمارەیە. بەڵام هێڵکاری ڕوونکردنەوەکەی لەو وێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.



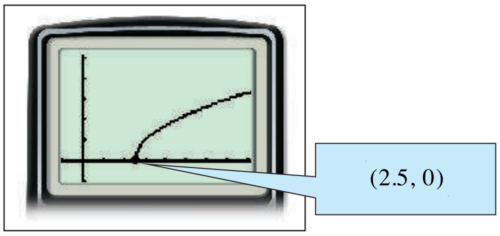
نموونە 1 بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ دیاریبکە.

شیکار

بواری ئەم نەخشە پێکدێت لە هەموو ژمارە ڕاستییەکانی وەك x کە بەهای بڕی $2x-5$ دەکاتە ژمارەیەکی نا سالب. بۆ دیاریکردنی ئەم بوارە، تەنها پێویستیت بە شیکاری لاسەنگەی

$2x-5\geq 0$ دەبێت

$$2x-5\geq 0$$
$$x\geq \frac{5}{2}=2.5$$

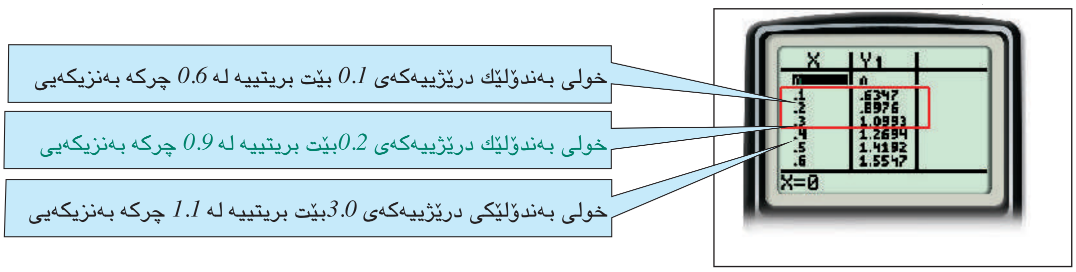


دڵنیابە بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ بریتییە لە $x\geq \frac{5}{2}$.

نموونە 2 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی بەندۆلەکە لە سەرەتای وانەکە، **خولی بەندۆلەکە** هەژمێربکە. کە درێژییەکەی *0.1m* و *0.2m* و *0.3m* بێت.

شیکار

نەخشەی $y=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی تۆماربکە و بە بەکارهێنانی کاری خشتەیی



کورتکردنەوەی بڕە ڕەگیەکان Symplifiying Radical Expressions

بڕە ڕەگیەکان **Radical Expressions** ئەو بڕانەن کە بە لایەنی کەمەوە بڕێك لەخۆدەگرێت وەدەکەوێتە ژێر ڕەگە دووجاکادا.

نموونە 3 بڕە ڕەگی $\sqrt{49a^2b^5x^6}$ کورتبکەوە.

لەبیرت بێت کە $\sqrt{b^2}=|b|$

شیکار

$$\sqrt{49a^2b^5x^6}=\sqrt{7^2a^2b^5x^6}=7|a|b^2|x^3|\sqrt{b}$$

هەوڵبدە بڕە ڕەگی $\sqrt{64a^4bx^3}$ کورتبکەرەوە.

هاوکێشە ڕەگیەکان Radical Equations

نموونە 4 هاوکێشەی $2\sqrt{x+5}=8$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

شیکار

$$2\sqrt{x+5}=8$$
$$\sqrt{x+5}=4$$
$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=4^2$$ بەدوو جاکردنی هەردوو لا
$$x+5=16$$
$$x=11$$

ساغكردنەوە

$2\sqrt{x+5}=8$

$2\sqrt{11+5}=8$

$2\times4=8$ دروستە

هەوڵبدە هاوكێشەی $3\sqrt{2x-1}=6$ شیكاربكە.

لە كاتی شیكاری هەندێك لە هاوكێشە ڕەگییەكان شیكاری نامۆمان بۆ دەردەچێت لەبەر ئەوە پێویستە ساغكردنەوەی شیكارەكەت بكەیت بۆ دوورخستنەوەی ئەم جۆرە شیكارانە.

نموونە 5 هاوكێشەی $\sqrt{x+1}+3=2x$ شیكاربكە و شیكارەكە ساغبكەرەوە.

شیكار

$\sqrt{x+1}+3=2x$

$\sqrt{x+1}=2x-3$ ڕەگەكە لە لایەكی هاوكێشەكە دابنێ

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(2x-3)^2$ هەردوو لای هاوكێشەكە دووجابكە

$x+1=4x^2-12x+9$

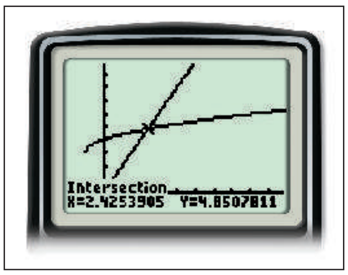
$4x^2-13x+8=0$ هاوكێشە دووجایەكە بەشێوەی گشتی بنووسە

$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{13^2-4\times4\times8}}{2\times4}$ یاسا بەكاربهێنە بۆ شیكاریكردنی هاوكێشە دووجاكە

$x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx2.43$ یان $x=\frac{13-\sqrt{41}}{8}\approx0.82$

ساغبكەرەوە

هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی دوو نەخشەی $y=\sqrt{x+1}+3$ و $y=2x$ بكێشە وبەدوای پۆی خاڵەكانی یەكتربرین بگەڕێ، یەك خاڵی یەكترین هەیە كە پۆیەكەی بریتییە لە $x\approx2.43$ كەواتە هاوكێشەكە تەنها یەك شیكاری هەیە كە بریتییە $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx2.43$ وشیكارەكەی تر شیكارێكی نامۆیە.



هەوڵبدە هاوكێشەی $\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+1}$ شیكاربكە ویاسادانی شیكارەكەت بكە.
هەندێ لە هاوكێشە ڕەگییەكان شیكاری نییە، وەك لەم نموونەیەدا دەردەكەوێت.

نموونە 6 هاوكێشەی $\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$ شیكاربكە ویاسادانی شیكارەكەت بكە.

شیكار

$\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$

$\left(\sqrt{x}-1\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$ هەردوو لای هاوكێشەكە دووجا بكە.

$x-2\sqrt{x}+1=2x+1$

$-2\sqrt{x}=x$ كورتبكەوە

$\left(-2\sqrt{x}\right)^2=(x)^2$ هەردوو لای هاوكێشەكە دووجا بكە.

$4x=x^2$

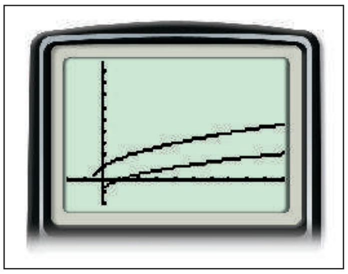
$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$x=0$ یان $x=4$

ساغبکەوە

$\sqrt{0}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\times0+1}$ $\qquad$ $\sqrt{4}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\times4+1}$

$-1=1$ هەڵەیە $\qquad$ $1=3$ هەڵەیە

دەشتوانی بە ڕوونکردنەوەیی وەڵامەکەت ساغبکەیتەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\sqrt{x}-1$ و $y=\sqrt{2x+1}$ بکێشە و ساغبکەوە کە یەکتر نابڕن.



هەوڵبدە $3\sqrt{x}+2=\sqrt{3x}$ شیکاربکەو ڕاستی وەڵامەکەت ساغبکەرەوە.

ڕاهێنـــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. چۆن بڕی $\sqrt{4x^3}$ سادە دەکەیت؟
2. دوو ڕێگای جیاواز بەکاربێنە بۆ شیکاری $\sqrt{x}=3\sqrt{x-4}$
3. بۆچی دەبێت لە شیکارکردنی هاوکێشە ڕەگییەکان پاسادانی ئەو شیکارانە بکەیت کە بە جەبری دەستمان دەکەوێت.
4. چۆن بە جەبری وڕوونکردنەوەیی ڕوونیدەکەیتەوە هاوکێشەی $\sqrt{x}=\sqrt{x+1}$ شیکاری نییە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5. بڕی $\sqrt{128ab^2x^5}$ سادەبکە.
6. بڕی $\frac{12\sqrt{15x^3}}{(3x)^{\frac{1}{2}}}$ سادەبکە، وای دابنێ x تەنها بەهای موجەب وەردەگرێت.
7. هاوکێشەی $3\sqrt{2x-5}=20$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.
8. هاوکێشەی $\sqrt{5x+7}-2=x$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.
9. هاوکێشەی $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x}-3$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم برانە سادەبکە.

10. $\sqrt{32x^3}$
11. $\sqrt{18x^3}$
12. $\sqrt{27x^3y^4}$
13. $\sqrt{50a^3b^4}$
14. $\left(16x^6\right)^{\frac{1}{4}}$
15. $\left(40a^7\right)^{\frac{1}{3}}$
16. $\frac{x}{3-5\sqrt{2}}-\left(2+3\sqrt{2}\right)$
17. $\frac{x}{4+\sqrt{3}}-\left(-1+3\sqrt{2}\right)$

بواری ئەم نەخشانە دیار بکە.

18 $f(x)=\sqrt{12x+24}$

19 $f(x)=\sqrt{3x-2}$

20 $f(x)=\sqrt{3(x-2)}$

21 $f(x)=\sqrt{3(x+2)-1}$

22 $f(x)=\sqrt{2-3(x+1)}$

23 $f(x)=\sqrt{3-2(x-4)}$

24 $f(x)=\sqrt{x^2-25}$

25 $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$

26 $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$

27 $f(x)=\sqrt{x^2+10x-25}$

28 $f(x)=\sqrt{2x^2+5x-12}$

29 $f(x)=\sqrt{3x^2+7x+2}$

30 $f(x)=\sqrt{6x^2-13x+5}$

31 $f(x)=\sqrt{8x^2-10x-3}$

32 بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ دیاربکە لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە وەڵامەکەت ساغبکەوە.

جێبەجێکردن

33 **ڕووداوەکانی هاتووچۆ:** لێکۆڵەرەوەکانی ڕووداوی هاتووچۆ سوود لە نەخشەیەك وەردەگرن بۆ دۆزینەوەی خێرایی ئەو ئۆتۆمبیلە لە کاتی ڕوداوێکدا بە پێوانی شوێنەواری تایەی ئۆتۆمبیلەکە لەسەر ڕێگاکەدا. کە لە ئەنجامی شێلانی ڕاگرەکەوە دروست دەبێت. ئەم نەخشە لە ڕۆژانی ساماڵدا بریتیە لە $y=\sqrt{80x}$ کاتێك x خێرایی ئۆتومبیلەکەیە بە کیلۆمەتر لەکاتژمێرێکدا و m درێژی شوێنەوارەکە بێت بە مەتر.

أ نەخشەی پێشوو بە سادەترین شێوە بنووسە بە بەکارهێنانی ڕەگی دووجا پاشان بینووسەوە بە بەکارهێنانی ژمارە دەییەکان.

ب لێکۆڵەرەوەکە درێژی شوێنەواری تایەکەی پێوا و بینی 200m دەبێت خێرایی ئۆتۆمبیلەکە بە نزیکترین کیلۆمەتر لە کاتژمێرێك هەژماربکە.

ج ئایا خێراییەکەی دوو ئەوەندی لێدێت ئەگەر شوێنەوارەکەش دوو ئەوەندە زیادبکات؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە.

تێڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم برانە سادەبکەرەوە وای دابنێ سفر بەهای قەدەغەکراوی گۆڕاوەکانە.

34 $\left(-2y^3y^5\right)^2$

35 $2x^4\left(-3xy^2\right)^3$

36 $\left(5x^{-2}y^4\right)^{-1}$

37 $\left(\frac{-3xy^3}{x^{-4}y^5}\right)^3$

38 $\left(\frac{-4m^4n^{-2}}{m^2n^{-2}}\right)^{-1}$

39 $\left(\frac{3m^4n^2}{2m^0n^{-3}}\right)^{-2}$

سفرەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە.

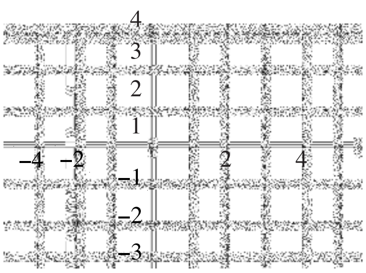
40 $f(x)=x^2+9x+18$

41 $f(x)=x^2-2x-8$

42 $f(x)=x^2-3x-18$

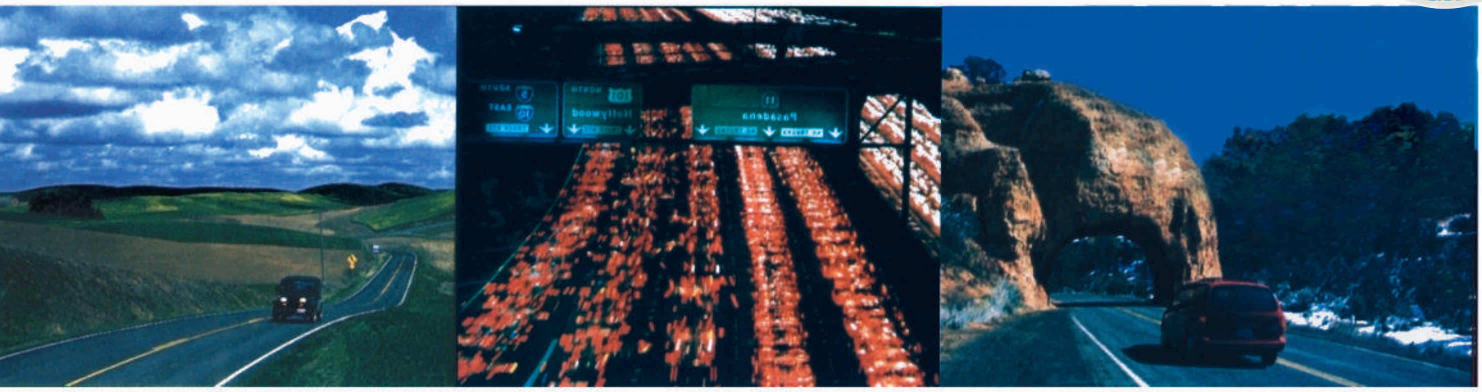
تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

43 بیردۆزی فیثاغورس بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان ئەو دوو خاڵەی لە شێوەکەی بەرامبەرتدا دیاریکراوە.



پرۆژەی بەش

کام ناوەند هەڵدەبژێریت؟



بۆ هەر کۆمەڵە بەهایەك دوو ناوەند هەیە کە ناوەندە ژمارەیی وناوەندە گونجاون. ناوەندە ژمێرەیی دوو ژمارەی b و c بریتیە لە $\frac{a+b}{2}$ بەڵام ناوەندە گونجاو بۆ دوو ژمارەی b ، c بریتیە لە $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

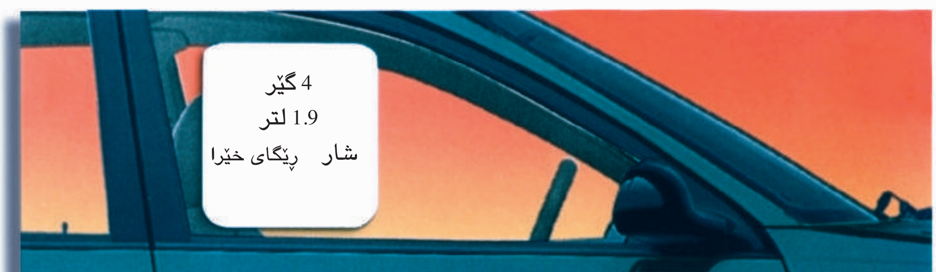
لە هەندێك شیکاری پرسیارەکان پشت بە ناوەندە ژمارەیی دەبەسترێت، بەڵام لە شیکاری هەندێکی تردا پشت بە ناوەند گونجاو دەبەسترێت. پشتبەستن بە یەکێك لەم دوو ناوەندە کارێکی جیاکەرەوەیە، چۆن ئەنجامەکان لەهەردوو بارەکەدا ڕەنگە بە تەواوەتی جیاوازبن.

بە ئامانجی پێدانی پێوەرێك کە ڕێگە بدات بە خەڵکانێك بەراوردی بەکاربردنی بەنزینی ئوتومبیلە نوێیەکان بکەن کە چەند گڵدانەوەی بەنزین دەکات.

دەزگای پاراستنی ژینگە بڵاوکراوەکانی بەسەر جامی ئوتۆمبیلەکاندا هەڵواسی کە تیایدا بڕی بەنزینی بەکاربراو تێداپشاندراوە. بۆنموونە دەزگاکە خەمڵاندنی ئوتۆمبیلێك کە 4 گێرو فراوانی مەکینەکەی 1.9 لیتر بێت یەك گاڵۆن بەنزین بۆ 39 کیلومەتر لەناوشار ویەك گاڵۆن بۆ 54 کیلومەتر لەسەر ڕێگای خێرا. وەزارەتی وزە لە هەندێك وولاتان ڕابەرێکی ساڵانە بڵاودەکاتەوە کە یاریدەدەری ئەو کەسانە دەدات کە دەیانەوێ ئۆتۆمبیلی تازە بکڕن. ئەم ڕابەرە مەزندەی بەکاربوونی ووزە بۆ هەر جۆرێك لە ئوتۆمبیلە تازەکان دیاریدەکات و ئەم ڕابەرە وریاکردنەوەی بەکارهێنەرەکان وریا دەکاتەوە.

وریاکردنەوەی خاوەن ئوتۆمبیلەکان

تکایە ئاگاداری ئەوە بن ناوەندەکان کە بەکاربردنی ئوتۆمبیلەکان لەناو شارەکاندا یان لەسەر ڕێگا خێراکان دەست نیشان دەکات تەنها خەملاندنە ڕەنگە خەملانەکە هەڵە تێبکرێت بۆ تێچوونی ساڵانەی ئوتۆمبیلەکە.



چالاکی 1

1. ناوەندە ژمێرەیی بۆ بەکاربردنی ئەو ئوتۆمبیلەی لەوێنەکەی سەرەوەدایە هەژمار بکە لەهەموو ڕۆیشتنەکەیدا.
2. ناوەندە گونجاو بۆ بەکاربردنی ئەو ئوتۆمبێلەی، لەوێنەکەی سەرەوەدا دیارە هەژمێر بکە لە هەموو ڕۆیشتنەکەیدا.
3. لەهەردوو ناوەندەکە بکۆڵەوە هۆکاری ئاگادارکردنەوەی ڕابەرەکە شیبکەرەوە.



چالاکی 2

لەوانەیە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی ئوتۆمبیلێك دەیبڕێت لە شاردا یەکسان نەبێت بە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی کە دەیبڕێت لەسەر ڕێگا خێراکان. ئەمەش وا دەکات کە هەژمێری ناوەندە ساڵانە کە بیرۆکەی بەکارچوونی ساڵانە دەدا بکرێت، هێمای گۆڕاوی d_1 بۆ ژمارەی کیلۆمەترەکانی ناوشار وگۆڕاوی d_2 بۆژمارەی کیلۆمەترەکانی سەر ڕێگای خێرا لەساڵێکدابن.
بۆ هەژمێری ژمارەی گالۆنە بەکاربراوەکان لە ساڵێکدا هەڵدەستین بەم هەژمارانە:

ناو شار: $(d_1\,km)\left(\frac{Galon}{39\,km}\right)=\frac{d_1}{39}\,gal$

لەسەر ڕێگای خێرا: $(d_2\,km)\left(\frac{Galon}{54\,km}\right)=\frac{d_2}{54}\,gal$

دەکرێ بەکارچوونی ساڵانەی ئوتۆمبیل بە هۆی بڕێکی ڕێژەیی وەك لای خوارەوە دەربببڕێت:
ناوەندە بەکاربردنی ساڵانە

$$a(d)=\frac{\text{ژمارەی کیلومەتری ساڵانە}}{\text{ژمارەی گالۆنی ساڵانە}}=\frac{d_1+d_2}{\frac{d_1}{39}+\frac{d_2}{54}}$$

1 وای دابنێ ئەو ئوتۆمبیلەی کە لەسەرەوە باسکراوە بکرێت. ئەوا ناوەندە بەکارچوونی ساڵانەی بەنزین چەندە ئەگەر $800Km$ لەناو شار و $400Km$ لەسەر ڕێگا خێراکان بڕوات؟

2 هەژماری تێچوونی بەنزینی ئوتۆمبیلەکە لە ساڵێکدا بکە ئەگەر نرخی یەك گالۆن لە بەنزین 700 دینار بێت.

چالاکی 3

ئامانج مەشق لەسەر پایسکل سواری دەکات، هەموو ڕۆژێك $2Km$ دەبڕیت. لە کیلۆمەتری یەکەمدا خێراییەکەی $20Km/h$ و لە کیلۆمەتری دووەمدا خێراییەکەی $10Km/h$ ئەویش بە هۆی هیلاکیەوە.

1 ئایا ناوەندە ژمێرەیی هەردوو خێراییەکە دەربڕین لە تێکڕای خێرایی ئامانج دەکات لەوماوەیدا؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

2 هەژماری ئەو خێراییە بکە کە پێویستە ئامانج پیێ بڕوات لە کیلۆمەتری دووەمدا بۆ ئەوەی تێکڕای خێراییەکەی لەم دوو کیلۆمەترەدا $15Km/h$ بێت.

5

پێداچوونەوەی بەش

1 گۆڕاوی m ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی b و پێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی c دەگۆڕێت بەهای m چەندە کاتێک $a=9$ و $b=12$ ئەگەر $m=6$ لەکاتێکدا $a=7$ و $b=4$ ؟

2 گۆڕاوی y ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی x وپێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی z دەگۆڕێت. بەهای y چەندە کاتێک $x=20$ و $z=2$ ئەگەر $y=3$ لەکاتێکدا $x=18$ و $z=2$ ؟

بوارو دەرکەنارەکانی هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە.

3 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-8x+12}$

4 $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-25}$

5 $f(x)=\dfrac{x^2+4x-12}{3x^2-12}$

6 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{3x+5}$

7 $f(x)=\dfrac{2x}{6x^4-18x^3}$

ئەم برانە سادەبکە.

8 $\dfrac{x^2+6x}{10}\times\dfrac{4}{x^2-36}$

9 $\dfrac{x^2+10x-8}{3x^2-17x+10}\times\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-4}$

10 $\dfrac{4x+8}{5x-20}\div\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4x}$

11 $\dfrac{2x^2-9}{6}\div\dfrac{4x-12}{x}$

12 $\dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x}}$

13 $\dfrac{\frac{a+1}{a^2}}{\frac{(a-1)^2}{a}}$

14 $\dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x+2}}$

15 $\dfrac{\frac{4x^2}{6x-3}}{\frac{15x}{2x-1}}$

ئەم برانە سادەبکە.

16 $\dfrac{3x-5}{3x-6}+\dfrac{4x-2}{5x-15}$

17 $\dfrac{9y+3}{y^2-11y+18}+\dfrac{y+3}{y-9}$

18 $\dfrac{2x-3}{x^2-3x}-\dfrac{9x+1}{x-3}$

19 $\dfrac{3y-39}{y^2-7y+10}-\dfrac{3}{y-2}$

20 $\dfrac{2}{\frac{x}{4}}+\dfrac{5}{\frac{x}{3}}$

21 $\dfrac{x}{3+\frac{5}{x}}-\dfrac{4}{1+\frac{2}{x}}$

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

22 $\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$

23 $\dfrac{4}{x^2+1}=1$

24 $\dfrac{3x-1}{x^2+2x}=-1$

25 $\dfrac{1}{x^2-1}=1$

26 $\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

27 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+2}{x+1}$

28 $\sqrt{x+2}=-2$

29 $\sqrt{x}=2x$

30 $\sqrt{x-2}=\sqrt{x}-2$

ئەم لاسەنگانە بەجەبری شیکاربکە.

31 $\dfrac{1}{x}<1$

32 $\dfrac{1}{x}\geq 2$

33 $\dfrac{1}{x^2+1}<\dfrac{1}{2}$

34 $\dfrac{1}{x^2+1}\geq\dfrac{1}{3}$

35 $\dfrac{x+1}{2x+3}<1$

36 $\dfrac{2x+1}{2x-1}<2$

بەڕوونکردنەوەی هەریەک لەم لاسەنگانە شیکاربکە

37 $\dfrac{1}{x}\geq x$

38 $\dfrac{1}{x^2+2x+1}>2$

39 $\dfrac{1}{x}<2x$

40 $\dfrac{1}{x^2-x+2}<x$

بواری هەریەک لەم نەخشانە دیاریبکە.

41 $f(x)=\sqrt{2x-3}$

42 $f(x)=\sqrt{x}-5$

43 $f(x)=5\sqrt{3(x-1)}+1$

تاقیکردنەوەی بەش

هەموو بەها قەدەغەکراوەکان وهەموو دەرکەنارەکان بۆ هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە.

1 $f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}$

2 $h(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-18}$

3 $g(x)=\frac{2x^3-16}{x^3-2x^2-9x+18}$

4 **میکانیك**: باری سلنگێك ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕانی پانیەکەیدا وپێچەوانە لەگەڵ سێجای درێژییەکەی دادەگۆڕێت.سلنگێك پانیەکەی $10m$ و درێژییەکەی $20m$ بێت بارێکی هەڵگرتووە کە $1200Kg$ ئەوا سلنگێك پانیەکەی $8m$ و درێژیەکەی $25m$ چەند دەتوانی هەڵبگرێت.

هەریەك لەم بڕانە سادەبکە

5 $\frac{x^2-9}{2x^2-8x+6}\times\frac{4x^2-12x+36}{x^3+27}$

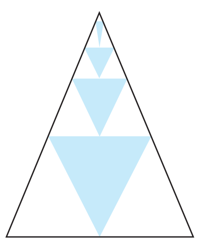
6 $\frac{\frac{x^3}{3x^2-12}}{\frac{x^3+5x^2}{3x^2+9x-30}}$

7 $\frac{3x}{x-2}\div\frac{6x^2}{2x^2-8}\times\frac{5x+1}{2x+4}$

8 $\frac{4}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}$

9 $\frac{x-37}{x^2-2x-15}-\frac{5}{x+3}$

10 **ئەندازە**: هەژمێری ڕووبەری ناوچە ڕەنگکراوەکە بە پێی ڕووبەری سێگۆشەکەبکە.کە بە گۆڕاوی x هێماکراوە.



هەریەکە لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.

11 $\frac{x+3}{x-1}=2$

12 $\frac{a-4}{a+2}+\frac{a-5}{a-4}=1$

13 $\frac{3}{x+4}\leq 5$

14 $\frac{3}{x+4}<\frac{5}{x+7}$

جێگۆری ئەندازەیی دیاربکە کە ڕێگا دەدات بە گواستنەوەی وێنە ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەرەتی $y=\sqrt{x}$ بۆ وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەکانی خوارەوە:

15 $y=\sqrt{x-4}$

16 $y=-\sqrt{x}+3$

هەژمارەی x بە پێی y بکە.

17 $y=x^2+x$

18 $y=5x^2-3x-4$

هەژمێری هەریەك لەم بڕانەبکە.

19 $\left(3\sqrt[4]{81}\right)^2-31$

20 $\frac{1}{5}\left[\left(\sqrt{9}\right)^3-\left(\sqrt[3]{64}\right)^2+2\right]$

هەریەك لەم بڕانە سادە بکەوە وای دابنێ هەریەکە لە گۆڕاوەکان جگە لە بەهای موجەب هیچ بەهایەك وەرناگرن.

21 $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$

22 $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5a}}$

23 $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$

24 $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

هەریەکە لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە کە ژێرەیان ڕێژەییبن.

25 $\frac{4}{\sqrt{11}}$

26 $\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

27 $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{35}}{35}$

هەریەك لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.

28 $\sqrt{2x+7}=-3$

29 $\sqrt[4]{3x}=\sqrt[4]{4x-7}$

30 $\sqrt{x-7}<0$

31 $\sqrt[3]{2x+1}\geq 3$

5 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 ئەگەر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ئەوا کام لەمانەی دێن ڕاستن بە تەواوەتی.

أ $ad=bc$ ج $ad=cb$

ب $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$ د $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

2 $\left(6\sqrt{8}-6\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)$ سادەبکە.

أ $6\sqrt{2}-24$ ج $6\sqrt{2}+24$

ب $12\sqrt{2}-23$ د $6\sqrt{2}-23$

3 ژمارەی شیکاری سیستمی $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x-2 \end{cases}$ چەندە؟

أ 0   ج 1

ب 2   د ناکۆتا

4 ماوەی دابەشکردنی $2x^2-5x+8$ بەسەر $x+4$ دا چەندە؟

أ 60   ج -44

ب سفر   د 20

5 $(x^3y^{-2})^{-2}$ سادەبکە.

أ $\frac{y^4}{x^6}$ ج $\frac{1}{x^2y}$

ب $\frac{x^6}{y^4}$ ب x^2y

6 کام لەمانەی خوارەوە نابێتە ڕەگی هاوکێشەی
$x^3+x^2-9x-9=0$

أ -3   ج -1

ب 3   د 1

7 چ ژمارەیەك لەمانەی خوارەوە بخرێتە سەر x^2-10x بۆ ئەوەی ببێتە دووجایەکی تەواو.

أ 5   ج -25

ب -5   ب 25

8 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بەدوو خاڵی $(-3,8)$ و $(-4,9)$ دا دەڕوات.

9 بڕی $25x^2-60x+30$ شیتەڵبکە.

10 بڕی $\frac{x+1}{x^2+4x-4}\div\frac{x^3}{x^2+4}$ سادەبکە.

11 پاش ڕێژەکردنی ژێرەی $\frac{8}{5-3\sqrt{2}}$ بڕەکە سادەبکە.

12 **بەهای ئەوپەڕ** بە بۆنەی چەژنی نەورۆز، شارەوانی شارێك تیری ئاگراوی بە خێراییەکی سەرەتایی $75m$ لە چرکەدا تەقاند. هەژماری ئەوپەڕی بەرزی بکە کە یەکێك لە تیرەکان دەیگاتێ وەهەروەها هەژماری کاتە خایەنراوەکەی بکە ئەگەر بزانیت $h(t)=75t-4.8t^2$ بەرزیە بە پێی کات، h بەرزیە بە مەترو t کاتە بە چرکە.

13 گەورەترین ژمارەی تەواو کامەیە لە پاسادانی $-6x-1>10$ دەکات

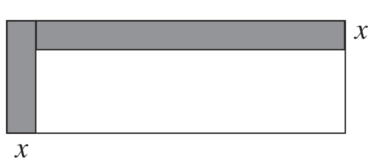
ئەمانە شیکاربکە.

14 $2\sqrt{x-4}=\sqrt{x-2}$

15 $1-2x=5$

16 $-5x+3=\frac{1}{2}x-1$

17 **بۆ خۆشی:** درێژی تەختەی نواندی شانۆیەك $38m$ و پانیەکەی $20m$، بەشێك لە تەختەکە بڕا هەروەك چۆن لە وێنەکەدا دیارە. بەهای x چەندە ئەگەر بزانیت ئەو بڕینە لە ڕووبەری تەختەکە $265m$ دووجا کەمدەکاتەوە.



بەشی شەشەم

ئەگەر و ئامار
Probability and Statistics

1. دەستپێکێك بۆ ئەگەر.
2. گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان.
3. گونجێنەکان.
4. کۆکردنەوەی ئەگەرەکان.
5. ڕووداوە سەربەخۆیەکان.
6. پێوەرەکانی پەرتبوون.

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 6

ئەگەر و ئامار

Probability and Statistics

ئەگەر بریتییە لە هاتنەدی ڕووداوێك كە دەتوانیت نپێشبینی ڕوودانی بكەیت و ناتوانیت ئەنجامەكانی دیاریبەكەیت لەگەڵ ئەوەی كە بەچەند مەرجێكی دیاریكراو پێناسەكراوە. ئەگەرەكان بەكارهێنانی زۆری هەیە بەرچاومان دەكەوێت لە كۆمپانیاكانی دڵنیابوون و دامەزراوەكانی لێكۆڵینەوەی وەك لێكۆڵینەوەی پزیشكی و ئەوانی تر، و لە جێبەجێكردنی یاساكان و لە زانستە ڕامیارییەكاندا.

وانەكان









دەربارەی پرۆژەی بەش

پێشبینییەکی دروست بۆ ئەنجامەکانی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان، ڕۆڵێکی گرنگ دەبینێت بۆ بڕیاردان، ئاسان یان ئاڵۆز. لە زۆر بواردا دەتوانرێت پێشبینی ئەگەری ڕووداوێکی هەڕەمەکی دیاریبکرێت بەڕێگای تاقیکردنەوە، ئەویش بە چاودێریکردنی ژمارەی ئەو جارانەی کە ڕووداوەکەی تێیدا دێتەدی. بەڵام لەوانەیە ئەمە نیمچە ستەم بێت کاتێك ڕووداوەکە ئاڵۆز بێت. لەو کاتەدا، مرۆڤ پەنا دەباتە بەر نواندن. لەمەودوا ئەم ڕێگایە بەکاردێت لەکاتی کارکردنتدا. لە دوای کۆتایی ئەم بەشەدا دەتوانیت هەستیت بە ئەمانەی خوارەوە.

- دروستکردنی نموونەکان (سامپڵ) (نموذج) بۆ نواندنی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان.
- بەکارهێنانی پێدراوەکان کە لە نواندنەکە دەستدەکەوێت بۆ خەملاندنی ئەگەری ڕووداوەکە.

وانەی
1

دەروازەیەك بۆ ئەگەر

Indroduction To Probability

بۆچی؟
زۆرجار توێژینەوەی ئەگەر بەبەكارهێنانی شتەكان لە ژیاندا وەك بەردەزار یان تیر یان پارچە دراوی كانزایی دەكرێت.



ئامانجەكان

- زاراوەكانی تایبەت بە ئەگەر بەكاردەهێنێت.
- یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەكاردەهێنێت.
- یەكسانبوون لە ئەگەرەكاندا دەناسێت.
- ئەگەری تیۆری ڕووداوێك دیاریدەكات.

گەلێك كۆمپانیای بازرگانی هەن. لەوانەش كۆمپانیاكانی دڵنیابوون، كارەكانیان بەندە بەو شتانەی كە پێشبینیكردنی ئەنجامەكانیان كارێكی ئاسان نیە، بۆمان هەیە بپرسین: چۆن دەتوانێت قازانج بكات، لەڕاستییدا دەتوانین پێشبینی ئەگەری ڕووداوی كارێك دیاریبكەین لە ڕێگای چاودێریكردنی ئەنجامەكانی بارە زۆرەكان كە لەوانەیە ببنە هۆی ڕوودانی ڕووداوەكە. بۆ نموونە دیاریكردنی ئەگەری مردنی جگەرەكێشێك بە چاودێریكردنی ڕێژەی ئەو كەسانەی كە بەهۆی جگەرەكێشانەوە دەمرن. كە ئەمەش ڕێژەیەكی زۆربەرزە هەروەكو توێژینەوە پزیشكییەكان سەلماندویانە. لە خوێندنی ئەگەرەكان كۆمەڵێك زاراوە بەكاردەهێنرێت خوێندكار پێویستە فێریان ببێت وبە شێوەیەكی دروست بەكاریان بهێنێت. ئەم خشتەی خوارەوە پێناسەكانی هەندێ لە زاراوەكانمان بۆ ڕوونده‌كاتەوە هەروەكو ڕوونكراوەتەوە بە نموونەی هەڵدانی بەردەزارێك.

پێناسە	نموونە
كاری هەڕەمەكی Trial: كارێكە ناتوانین پێشەكی ئەنجامەكەی دیاریبكەن	هەڵدانی بەردەزاێك
تاقیكردنەوە(هەڕەمەكی) Experiment: كارێكی هەڕەمەكییە یان دووبارەبوونەوەی كارە هەڕەمەكیەكەیە چەند جارێك	هەڵدانی بەردەزارێك 10جار
كۆمەڵەی ئەنجامەكان(بۆشایی نموونە) Sample Space : كۆمەڵەی هەموو ئەنجامەكانی لە تواناداببێت لە كارێكی هەڕەمەكیدا.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
ڕووداو Event : ئەنجامێكی لە توانادایە یان كۆمەڵێك ئەنجامی لە توانادایە.	دەستكەوتنی 3 یان دەستكەوتنی ژمارەیەكی تاك

بە ئەنجامەكانی كارێكی هەڕەمەكی دەڵێین ئەگەری یەكسان ئەگەر لە تواناداببێت هەموو ئەو ئەنجامانەی دەردەكەون یەكسان بن. لەڕاستیدا سەلماندنی ئەوەی هەموو ئەنجامەكانی كاری هەڕەمەكی لە ژیاندا ئەگەر تیایاندا یەكسان بن كارێكی گرانە. بەڵام دەتوانین خۆمان وای دابنێین كە وایە. بۆ نموونە دەتوانیت ئەنجامەكانی هەموو كارە هەڕەمەكیەكانی خوارەوە بە ئەگەری یەكسان دابنێیت: هەڵدانی بەردەزارێك، هەڵدانی پارچە دراوێكی كانزایی، ئەنجامی چەرخێكی میلدار، ڕەگەزی لە دایكبوو.

نموونە 1

ئەگەری چاکبوونەوەی یەکێکی توشبوو بە شێرپەنجەی سی چەندە، ئەگەر بزانیت توێژینەوەیەك لەسەر 5000 توشبوو کراوە لەوانە 250 یان چاکبوونەتەوە؟

شیکار

دەتوانیت کۆمەڵەی ئەنجامەکانی 5000 توشبوو، لە نێوانیاندا 250 کەس چاکبووەتەوە ئەگەری چاکبوونەوەی نەخۆشەکە بریتیە لە.

$$P(c)=\frac{250}{5000}=\frac{1}{20}=0.05=5\%$$

هێمای c بەکاردێت بۆ ڕووداوی (چاکبوونەوەی نەخۆش)

نموونە 2

دۆستی بەردەزارێکی هەڵدا ئەگەری دەستکەوتنی یەکێك لە چەند جارەکانی 3 چەندە؟

شیکار

بۆشایی نموونە = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ڕووداوەکە دێتەدی ئەگەر دۆستی 3 یان 6ی دەستبکەوێت.

ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ئەگەری ڕووداوەکە بریتییەلە2 لە بنچینەی 6 واتە:

$$P(M3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0.3333\approx 33.33\%$$

گریمانM3 هێمایەکە بۆ یەکێك لە چەند جارەکانی 3

ئەگەری تیۆری Theoritical Probability

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دیاریکراو و ڕێکبوو ئەوا ئەگەری ڕووداوێك A لە ڕووداوەکانی بریتییە لە ژمارەی ڕاستی:

$$P(A)=\frac{\text{ژمارەی ئەنجامەکانی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکان}}$$

بەرەنگاری

چێنەر گۆیەکی لە تورەگەیەکدا ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تیدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە شین بێت چەندە؟

ئەگەر Probability

پێوانەی ئەگەری ڕووداوێك ژمارەیەکی ڕاستییە ودەکەوێتە نێوان سفر ویەك.

ئەگەر ڕووداوەکە ئەستەم بێت **Impossible** ئەوا ئەگەری ڕووداني = 0

ئەگەر ڕووداوەکە دڵنیایی بێت **Certain** ئەوا ئەگەری ڕووداني = 1

سەرجەمی ئەگەرەکانی هەموو ئەنجامەکانی لە توانادابێت = 1

ئەگەری تیۆری Theoretical Probability

ئەگەری ڕوداووێك لە ڕووداوەكانی تاقیكردنەوەیەك كە ئەنجامەكەی ئەگەری یەكسانیان هەبێت، بریتیە لە ژمارەیەكی ڕاستی و یەكسانە بەم كەرتە.

$$p(A) = \frac{\text{ژمارەی ئەو بارانەی كە ڕووداوەكە دێنێتەدی}}{\text{ژمارەی هەموو بارە لە تواناكان}}$$



نموونە 3



مەریوان پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 2 پەپكی سوور 4 پەپكی شین و 3 پەپكی زەردی تێدایە.
ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت چەندە؟

شیكار

ئەنجامەكانی ئەم تاقیكردنەوە هەرەمەكیە ئەگەری یەكسانە.دەتوانیت بۆشایی نموونەكە بەم شێوەیە بنوێنین.
ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت 3 لە 9 یە.

$$\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\}$$

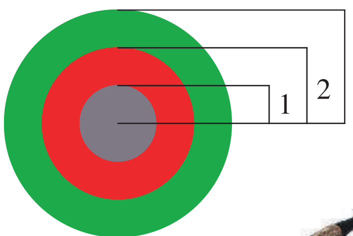
Y هێمای ڕووداوی «ڕاكێشانی پەپكی زەردە» $P(Y) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

هەوڵبدە

كامەران پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 3 پەپكی سوور و 5 پەپكی شین و 7 پەپكی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی پەپكی ڕاكێشراو شین بێت چەندە؟

بۆشایی نموونە لە نموونەكانی ڕابردوو لە كۆمەڵەیەكی دواهاتوو پێكدێت. لە كاتێكدا تاقیكردنەوەی هەرەمەكی وا هەیە بۆشایی نموونەكە تیایاندا كۆمەڵەیەكی دوانە هاتووە.

نموونە 4





بریار تیرێكی هەڵدا بۆ ئەوەی بچەقێت لە پارچە تەختەیەكی بازنەیی كە بەدیوارێكدا هەڵواسرابوو. **ئەگەری ئەوەی تیرەكە بچەقێت لە ناوچەی سەوز چەندە؟**



شیكار

هەر خاڵێك لە خاڵەكانی بازنەكە ئەنجامێك دەردەبڕێت كە لە توانادایە. لەم بارەدا، دەڵێین، كە بۆشایی نموونەكە، كۆمەڵەیەكی دوانەهاتووە، خاڵەكانی ڕووداوەكە دێننەدی بریتین لە خاڵەكانی ناوچە سەوزەكە. بۆ هەژمێركردنی ئەگەری ڕووداوی داواكراو، ڕووبەری ناوچە سەوزەكە بەسەر ڕووبەری گشتی تەختەكە دابەشبكە.

$$P(G) = \frac{\text{ڕووبەری ناوچەی سەوز}}{\text{ڕووبەری گشتی تەختە بازنەییەكە}} = \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2} = \frac{5\pi}{9\pi} = \frac{5}{9} = 0.556 = 55.6\%$$

كە G هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەكە «چەقینی تیرەكە لە ناوچە سەوزەكە».

هەوڵبدە

ئەگەری ئەوەی تیرە كە لە ناوچە سوورەكە بچەقێت چەندە؟

نموونە 5

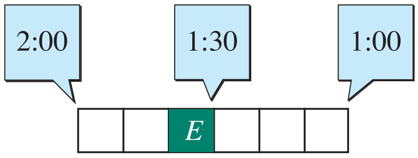
جێبەجێکردنەکانی

بژمێر

شەماڵ ڕۆژانە سەیری پۆستە ئەلکترۆنییەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر یەك 1:00 و کاتژمێر دوو 2:00 ی پاش نیوەڕۆ ئەگەری ئەوەی لە نێوان 1:30 و 1:40 بەو کارە هەستێت چەندە؟

شیکار

بۆشایی نموونە لەهەرساتێکی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 پێکدێت و ڕووداوەکە لە 1:30 تا 1:40
بۆ هەژمێرکردنی ڕێژەی ئەگەری ئەو ڕووداوە، ماوەی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 دابەش دەکەیت بۆچەند ماوەیەك کە هەریەکەیان 10 خولەك بێت
(درێژی ماوەی نێوان 1:30 و 1:40 کەڕووداوەکە دەنوێنێت).



ماوە سەوزەکە ڕووداوەکە دەنوێنێت. ئەگەری ڕوودانی ڕووداوەکە، واتا، ماوەیەك لە 6 ماوە واتە:

$$P(E)=\frac{1}{6}=0.167=16.7\%$$

کاتێك E هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەکە
(سەیرکردنی شەماڵ بۆ پۆستە ئەلکترۆنییەکەی لە 1:30 بۆ 1:40)

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی لە نێوان 1:30 و 1:35 بەو کارە هەستێت چەندە؟

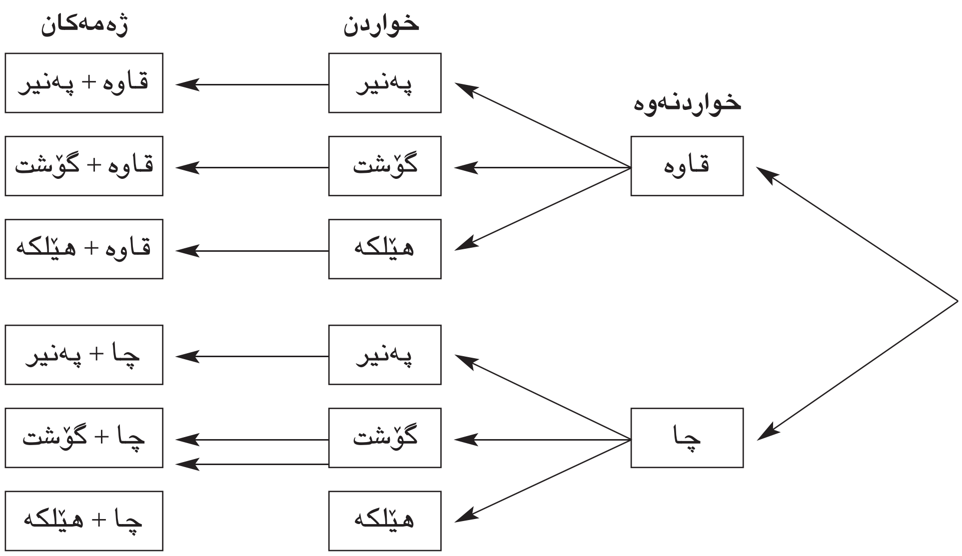
یاسای بنەڕەتی ژماردن Fundamental Counting Principle

کە لە ڕووداوێك دەکۆڵێتەوە بۆ ئەوەی ڕێژەی ئەگەرەکەی هەژمێربکەی پێویستت بەمانە دەبێت:

1. هەموو ئەم ئەنجامانەی کە لە توانادایە بژمێرە (دانەکانی بۆشایی نموونە بنووسە).

2. ئەو ئەنجامانە بژمێرە کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات. دەتوانیت هێڵکاری درەختی بەکاربهێنیت بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە.

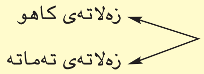
بۆ نموونە ژەمی خواردنی بەیانی لە یەکێك لە ئوتێلەکاندا، میوانەکە دەتوانێت لە نێوان قاوە وچای یەکێکیان هەڵبژێرێت و لە نێوان سێ جۆری خواردن پەنیر و گۆشت و هێلکەدا یەکێك هەڵبژێریت. ئەم هێڵکارییەی خوارەوە هەموو ڕێگاکانی کە لە توانادا یە بۆ ژەمی خواردنی بەیانی ڕووندەکاتەوە .



چالاکی

دۆزینەوەی هێڵکاری درەختی — Exploring Tree Diagram

خواردنگەیەك دوو جۆر خواردنی بۆ میوانەکانی ئامادەکرد بۆ ژەمی ئێوارە هەر ژەمێك پێکهاتبوو لە قاپێك زەلاتە و قاپێك گۆشت، میوانەکە بۆی هەیە یەك جۆر لەدوو جۆر زەلاتە هەڵبژێرێت: زەلاتەی کاهو، زەلاتەی تەماتە، قاپە گۆشتەکە سێ جۆرە: گۆشتی برژاو، گۆشتی سورەوەکراو، گۆشتی مریشك



1. دەستبکە بەکێشانی هێڵکاری درەختی تێیدا هەڵبژاردنی زەلاتە ڕوونبکەوە بەم شێوەیە
2. لە دەستپێکردنی هەڵبژاردنی زەلاتەکەوە هێڵکاری درەختی ڕوونبکەوە بۆ هەڵبژاردنەکانی سێ جۆرە گۆشتەکە.
3. ئەو ژەمانەی کەپێکدەهێنرێت کامانەن؟ ژمارەیان چەندە؟
4. خواردنگەکە ئێستا پیازی برژاو یان سیری برژاو دەخاتە سەر قاپی گۆشتەکە تۆش ئەمە بخەرەسەر هێلکاری درەختەکە کە ڕێگا بە ژماردنی ئەم ژەمە خۆراکییانەی کە ئێستا دروستبوون، ئەو ژمارەیە چەندە؟

خاڵی چاودێری

خاڵی چاودێری

هێڵکاریەکی درەختی دروستبکە بۆ نموونەی پێشوو. بەبێ گوێدانە خستنەڕووی خاڵی چوارەم. بە قاپی گۆشت دەستپێبکە وەك هەڵبژاردنی یەکەم. ئایا ئەم گۆڕانکارییە لەڕیزکردنی دوو هەڵبژاردنەکە کاری کردە سەر گۆڕانی ئەنجامەکان؟

وردبوونەوە لە هێڵکاری درەختی وزانینی ڕێگای دروستکردنی دەبێتە هۆی ڕوونکردنەوەی یاسای ژماردنی بنەڕەتی.

یاسای بنەڕەتی ژماردن — Fundamental Counting Principle

ئەگەر m ڕێگا بۆ هەڵبژاردنی یەکەم و n ڕێگا بۆ هەڵبژاردنی دووەم هەبێت ئەوا $m \times n$ ڕێگا بۆ هەردوو هەڵبژادنەکە بەیەکەوە هەیە.

نموونە 6

جێبەجێکردنەکانی: بژمێر

دانا ویستی وشەی نهێنی تایبەتی چوونە ناو ئینتەرنێت هەڵبژێرێت. ئەم وشەیە پێکدێت لە دوو پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی بەدوایدا چوار ڕەنووس. دانا دەتوانێ چەند وشەی نهێنی دروستبکات ئەگەر زانیت کەوا ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی سفر بەکاربهێنێت؟(ژمارەی پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی 26 پیتە)

شیکار

دانا دەتوانێت هەرپیتێك لە نێوان 25 پیت هەڵبژێرێت و هەر ڕەنووسێك لە نێوان 9 ڕەنووس هەڵبژێرێت. بەجێبەجێکردنی یاسای بنەڕەتی ژماردن ئەمەی خوارەوەمان دەست دەکەوێت. ;

ژمارەی وشە نەهێنیەکان	پیتی یەکەم		پیتی دووەم		ڕەنووسی یەکەم		ڕەنووسی دووەم		ڕەنووسی سێیەم		ڕەنووسی چوارەم
←	25	×	25	×	9	×	9	×	9	×	9

$$25^2 \times 9^4 = 41\ 00\ 625$$

نموونـــــه

7 تابلۆی ئۆتۆمبێلەکان پێکدێن لە سێ پیت بەدوایدا لە سێ ڕەنووس دێت. ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبیلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانی خۆت بەرێز (ژمارەی پیتەکانی ئەبجەدی عەرەبی 28 پیتە) چەندە؟

شیکار

دانەکانی بۆشایی نموونەکە:

پیتی یەکەم	پیتی دووەم	پیتی سێیەم	ڕەنووسی یەکەم	ڕەنووسی دووەم	ڕەنووسی سێیەم
28 ×	28 ×	28 ×	10 ×	10 ×	10

ژمارەی تابلۆکانی لەتواناداپە دەبێتە $28^3 \times 10^3 = 21\ 252\ 000$ تابلۆ.

پاشان ژمارەی ئەو تابلۆیانە بدۆزەرەوەکە مەرجەکە دێنێتەدی.

پیتی یەکەم	پیتی دووەم	پیتی سێیەم	ڕەنووسی یەکەم	ڕەنووسی دووەم	ڕەنووسی سێیەم
1 ×	1 ×	1 ×	10 ×	10 ×	10

بەمەش ژمارەی تابلۆکانی مەرجەکە دێننەدی بریتین لە $10^3 = 1\ 000$ تابلۆ.

ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبێلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانیت بەرێز

بریتییە لە: $\frac{1000}{21\ 952\ 000} = 0.000045$ واتە 45 لە ملیۆنێك.

جێبەجێکردنەکانی

بازرگانی

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 سێ نموونە لەسەر ڕووداوێك بهێنەوە کە ئەنجامەکانیان وەك یەك نەبن.

2 ئەگەری تیۆری وئەگەری تاقیکردنەوە لە چیدا لێکدەچن؟ لە چیدا جیاوازن؟

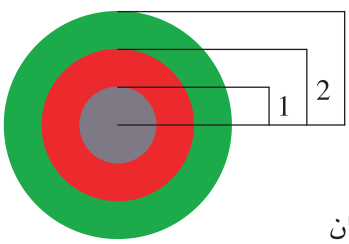
3 چۆن ڕووبەرەکان بەکار دەهێنرێت بۆ هەژمارکردنی ئەگەرەکان؟

4 چۆن هێڵکاری درەختی یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتنی یاسای ژماردنی بنەڕەتی؟



ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5 دارا گۆیەکی شوشەیی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 5 گۆی شین و 3 گۆی سوور و یەك گۆی سپی تێدایە. ئەگەری ئەوەی کە گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟



6 ڕێژین تیریکی گرتە تابلۆیەکی تەختەی ڕەنگراوی هەڵواسراو لە سەر دیوارێك. ئەگەری ئەوە بدۆزەوە کەتیرەکە لەناوچەی بازنە بچووکەکە بچەقێت؟

7 ئاکام ڕۆژانە سەیری پۆستی ئەلیکترۆنیەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر حەوت و کاتژمێر هەشتی بەیانی. ئەگەری ئەوەی ئەم کارە لە نێوان 7:30 و 7:45 ئەنجام بدات چەندە؟

8 ڕەوەز ویستی وشە نهێنیە تایبەتییەکەی هەڵبژێریت بوچوونە ناو ئینتەرنێتەوە، ئەم وشە پێکدێت لە 3 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و سێ ڕەنووسی بەدواییدا بێت. چەند وشەی نهێنی دەتوانیت پێکبهێنێت، ئەگەر بزانی ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی 0 بەکاربهێنێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

تورەگەیەك 3 پلێتی سپی و دوو پلێتی ڕەش و 5 پلێتی سووری تێدایە هەموویان هاوشێوەن و زانا پلیتێکی ڕاکێشا. ئەگەری ئەو پلیتە ڕاکێشراوە بدۆزەوە بۆ ئەوەی.

9 سپی بێت　　**10** ڕەش بێت　　**11** سوور بێت

ئەگەر بەردەزارێك یەك جار هەڵبدرێت ئەگەری ئەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەوە.

12 دەستکەوتنی ژمارە 1　　**13** دەستکەوتنی ژمارە 4 .

14 دەستکەوتنی ژمارەی جووت　　**15** دەستکەوتنی ژمارەی تاك.

16 دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە3 .　　**17** دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 3 .

18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 6 .　　**19** دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 7 .

پاسی گواستنەوە دەگاتە شوێنی ڕاوەستانی تەنیشت ماڵی دانا لە نێوان کاتژمێر هەشت و 5 خولەکی بەیانی. ئەگەری ئەوەی کە دانا سواری پاسەکە بێت کاتی گەیشتە شوێنی وەستان لەم کاتانەی خوارەوەدا بدۆزەوە.

20 8:04　　**21** 8:02　　**22** 8:01　　**23** 8:03

لە دوو پرسیاری 4224 و 25 هێڵکاری درەختی دروستبکە بۆ ئەوەی بۆشایی نموونەی ڕووداوەکە ڕوونبکاتەوە.

24 تۆمارکرن لە چالاکییەکانی دەرەکییەکان (یەك چالاکی لە هەریەك لە چەشنەکانی (1,2,3

وەرزش : تۆپی پێ، تۆپی سەبەتە، تۆپی سەرمێز.

هونەر : مۆسیقا، وێنە.

یانە : زانست، بیرکاری

25 ئارەزووەکان (خولیاکان) (ئارەزوویەك لە هەر یەکە لە دوو چەشنی A ، B)

لەناوماڵ : خوێندنەوە، سەیرکردنی تەلەفزیۆن، گوێگرتن لە مۆسیقا.

لە دەرەوەی ماڵ: ڕاکردن، گەشتکردن، چوونە یانە.

ژمارەی وشە نهێنیەکان کە دەتوانرێت پێکبهێنرێن بەبەکارهێنانی هەموو پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و هەموو ڕەنووسەکان لە هەریەك لەم بارانەی خوارەوە دیاریبکە.

26 دوو ڕەنووس بەدواییدا سێ پیت و بەدوای ئەوانە یەك ڕەنووس بێت.

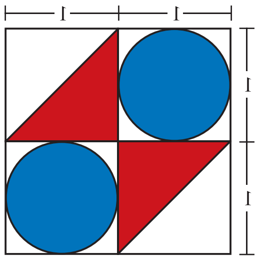
27 سێ ڕەنوس بەدواییدا دوو پیت و بەدوای ئەوان یەك ڕەنووس بێت.

28 سێ پیتی جیاواز بەدواییدا سێ ڕەنووسی جیاواز بێت.

29 دوو پیت بەدواییدا چوار ڕەنووس بێت.

بەستنەوە

ئەندازە کامەران تیرێکی هەڵدا بۆ سەر تابلۆیەکی تەختەیی ڕەنگکراو کەلەم وێنەیەدا ڕوونکراوەتەوە. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێربکە.



30 تیرەکە ناوچەیەکی بازنەیی بپێکێت.

31 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سوورەکە بپێکێت.

32 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سپیەکە بپێکێت.

33 تیرەکە ناوچەیەکی سپی بپێکێت.

بەرەنگاری

جێبەجێکردنەکان

دیمۆگرافیا ئەم خشتەیەی خوارەوە چەند خوێندکارێکی تۆمارکراو لە یەکێك لە کۆلیژەکانی زانکۆیەك بە پێی تەمەن و ڕەگەزیان پێشاندەدات.

تەمەن	هاتووەکان	هاوڵاتی
14 – 17	83	93
18 – 19	1 224	1 416
20 – 21	1 294	1 414
22 – 24	1 260	1 263
25 – 29	950	1 058
30 – 34	661	811
35 و سەروتر	955	1 824

ڕاگری کۆلێژ هەستا بە هەڵبژاردنی یەکێك لە تۆمارکراوەکان. ئەگەری ئەوەی تەمەنی ئەو کەسە لە یەکێك لەم چەشنانە بێت چەندە؟

34 18 – 24 **35** 25 – 29 **36** 30 – 34 **37** 30 بەرەوژوور

38 **ئاسایش** یەکێك لە پسپۆڕەکانی ئاسایش ویستی کلیلێك دروستبکات بۆیەکێك لە سیستمەکانی ئاسایش ئەم کلیلە لە سێ پیت پێکدێت A ،B ،C لە توانادایە هەریەکێك لەم پیتانە زیاتر لە جارێك دوبارەببێتەوە، ئەو پسپۆڕە ویستی ئەگەری سەرکەوتنی هەوڵەکانی کردنەوەی کلیلەکە لە 0.001 کەمتر بێت، کەمترین ژمارەی پیتەکانی ئەو کلیلە دەگاتە چەند؟

ڕوانین بۆ دواوە

پلەی هەریەك لەم ڕادەدارانە چەندە؟

39 $x^3+4x^5-6x^2+x-10$

40 $x+3x^5$

هەریەك لەم هاوكێشە و لاسەنگەیە شیكاربكە.

41 $x^3-2x^2-x+2=0$

42 $x^2-3x+2>0$

جێبەجێكردنەكانی
ئابووری

43 پیشەسازكارێك وایدانا نەخشەی $C(x)=0.1x^2+5x+40$ نموونەیەك بۆ تێچوونی كاڵاكانی پێكدەهێنێت. هێمای x لەم نەخشەیەدا ئاماژەیە بۆ ژمارەی یەكەكانی بەرهەم هێنان و هێمای C بۆ تێچوونی بەرهەمەكەیە. تێچوونی بەرهەمهێنانی 10 كاڵا چەندە؟ لەبارێكی تردا پیشەسازكارەكە بڕیاریدا بەرهەمەكە بفرۆشێت بە 60 هەزار دینار بۆ هەر دانەیەك. دەبێت چەند ژمارە لەو كاڵایانە بفرۆشێت بۆ ئەوەی گەورەترین قازانجی دەستبكەوێت؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

44 سامان ویستی دوو پیت لەم پیتانە هەڵبژێرێت A B ،C ،D ،E ژمارەی شیكارەكانی لە توانادا چەندە؟ئەگەر سامان گرنگی بدات بە ڕیزكردن لەكاتی ڕاكێشان (شیكاری B، A وەك شیكاری A، B نیە).
ئەگەر سامان بایەخ نەدات بەڕێزكردن (هەردوو شیكار A، B و B، A هەمان شیكارە).

وانەی
2

گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان

Permutations and Arrangements



بۆچی؟

لێرەدا زۆر بار هەیە بایەخ دەدات بە ڕێکخستنی ژمارەیەک لەدانە دیاریکراوەکانی کۆمەڵەیەک بە شێوەیەکی ڕێزکراو.

ئامانجەکان

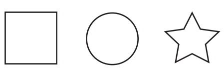
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستی بە گۆڕینەکان هەیە. و دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەیەک کە لە n دانە پێکهاتووە دیاردەکات.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستیان بە ڕێزکردن هەیە ودیاریکردنی هەموو ڕێزکراوەکانی m دانەیە لە n .

ئەرنۆلد شوینبرگ مۆسیقایەکی داهێنا کە لە 12 ئاواز پێکهاتووە. پێویستە هەر نۆتەیەک لە نۆتەکانی پەیژەی مۆسیقی بە لایەنی کەمەوە یەك جار بەکاربێت، پێش لەرینەوەی هەر یەکێکیان. بەهەر کۆمەڵەیەك لە 12 ئاوازەکە دەوترێت ئاوازە دێڕ **Tone Row**. چەند ئاوازە دێڕی جیاواز دەتوانیت بنووسی؟

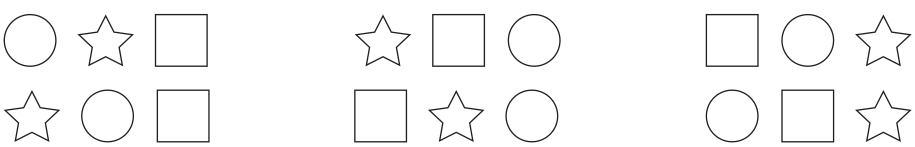
گۆڕینەکان Permutations

گۆڕین ڕێکخستنی ژمارەیەك شتە لە ڕیزکردنێکی دیاریکراودا.

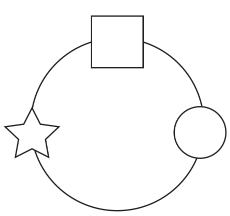
نموونە 1

هەموو گۆڕینەکانی ئەم شتانە بکێشە 

شیکار



دەتوانیت شتەکان لە سەر هێڵێك ڕێکخەیت وەك نموونەکەی پێشوو.
و دەتوانیت ڕێکیان بخەیت لەسەر بازنەیەك وەك ئەم وێنەیە.
ڕێکخستنی شتەکان لە باری یەکەمدا گۆڕینێکی هێڵییە و لەباری دووەمدا گۆڕینێکی بازنەییە.



نموونە 2

شیکارکردنی پرسیارەکان

دروستکردنی لیستی ڕێکخراو: ئەم خشتەی خوارەوە هەموو ئەو گۆڕینانەی لە توانادایە بۆ پیتە لاتینیەکان D ،C ،B ،A ڕووندەکاتەوە چۆن یاسای ژماردنی بنچینە بەکاردێنێت بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەم گۆڕینانە؟

$ABCD$	$BACD$	$CABD$	$DABC$
$ABDC$	$BADC$	$CADB$	$DACB$
$ACBD$	$BCAD$	$CBAD$	$DBAC$
$ACDB$	$BCDA$	$CBDA$	$DBCA$
$ADBC$	$BDAC$	$CDAB$	$DCAB$
$ADCB$	$BDCA$	$CDBA$	$DCBA$

شیکار

دەتوانیت ژمارەی ئەو گۆڕینانە دیاریبکەیت بە بەکارهێنانی یاسای بنەڕەتی ژماردن وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

دەتوانرێت پیتی یەکەم هەڵبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی دووەم هەڵبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی سێیەم هەڵبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی چوارەم هەڵبژێرێت لە
4	3	2	1

ژمارەی گۆڕینەکان بریتییە لە $4\times3\times2\times1=24$ گۆڕین.

بۆ دەربڕینێکی پوختە بۆ ئەم لێکدانە ئەمە: $4!=4\times3\times2\times1=24$ بەکاربێنە

n لێکدراوی n factorial

ئەگەر n ژمارەیەکی تەواوی نا سالیب بێت. ئەوا لێکدراوی n بە $n!$ دەنووسرێت وەدەکاتە:

$$n!=\begin{cases}1 & \text{کە } n=0\\ 1\times2\times\ldots\times n & \text{کە } n>0\end{cases}$$

نموونە 3

ڕاستی و دۆستی ورەوەز بەشداریانکرد لە یاری بازداندا، بۆشایی نموونە بۆ ئەم یارییە دیاریبکە؟ژمارەیان چەندە؟ئەگەری ئەوەی ڕەوەز یەکەم بێت چەندە؟

شیکار

ئەو ئەنجامامەی لە توانادایە لەم یارییەدا:

یەکەم	ڕاستی	ڕاستی	دۆستی	دۆستی	ڕەوەز	ڕەوەز
دووەم	دۆستی	ڕەوەز	ڕاستی	ڕەوەز	ڕاستی	دۆستی
سێیەم	ڕەوەز	دۆستی	ڕەوەز	ڕاستی	دۆستی	ڕاستی

ژمارەی ئەنجامەکانی لەتوانادایە دەکاتە 6 .

ژمارەی ئەو ئەنجامانەی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات (ڕەوەز یەکەم بێت) دووە. ئەگەری ئەوەی کە ڕەوەز یەکەم بێت $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$

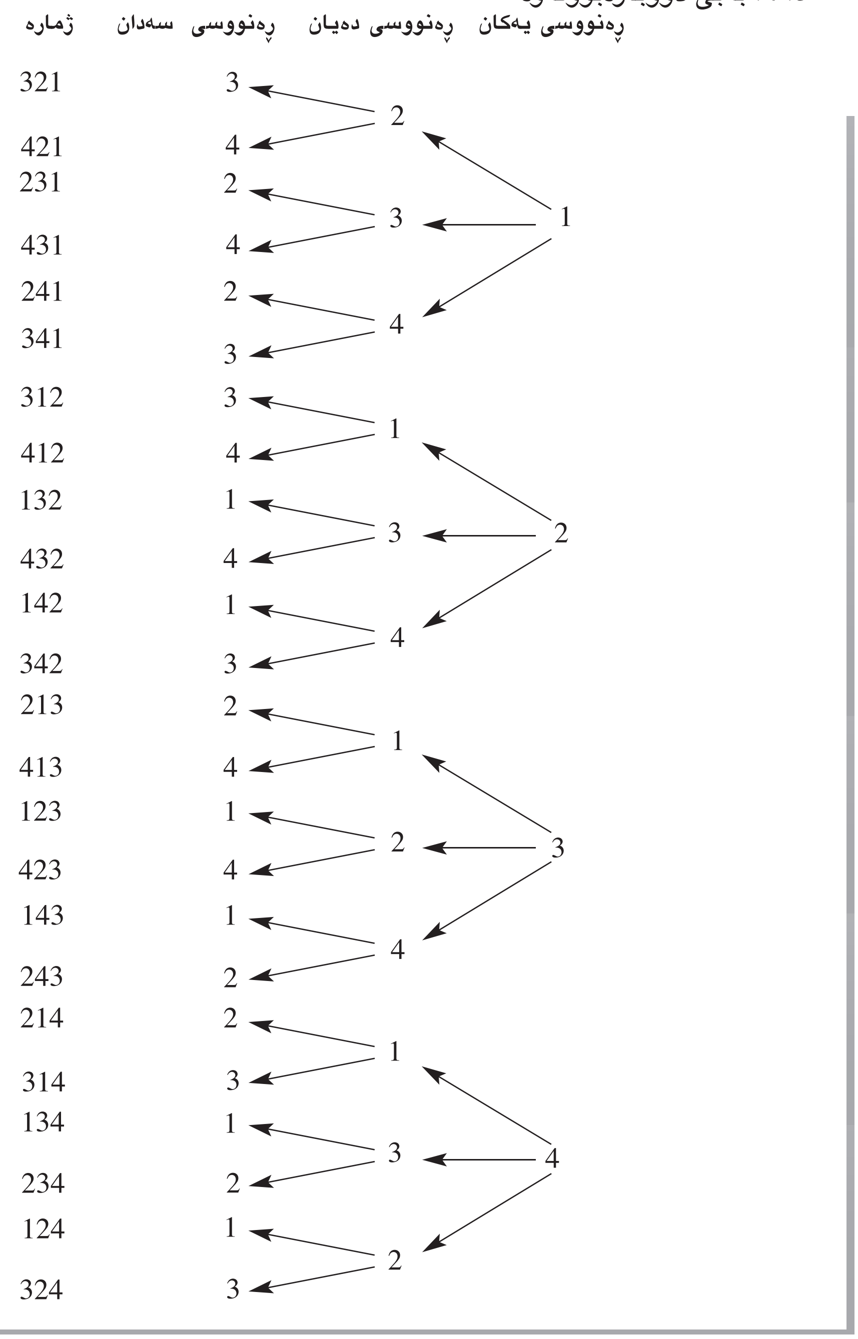
هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دووبارەبونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە.

نموونه 4 **دەتوانیت چەند ژمارەی 3 ڕەنوسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دوبارەبوونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە؟**

شیکار

هێڵکاری درەختی بەکاربهێنە. ئەم هێڵکارییە درەختییەی خوارەوە هەموو ئەو هەڵبژاردنانەی کە لە توانادا هەیە ڕووندەکاتەوە بۆ هەڵبژاردنی ڕەنووسی یەکان لە دواییدا ڕەنووسی دەیان، پاشان ڕەنووسی سەدان. و هەروەها ژمارەکەش دیاریدەکات لەهەر بارێکدا.

دەتوانی 24 ژمارە پێکبهێنیت کە لە 3 ڕەنووس پێکهاتبێت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، بەبێ دووبارەبوونەوە



هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسی1، 2، 3، 4، 5، بەبێ دووبارەبوونەوە؟

ئەوەی پێی هەڵسایت لە نموونەی پێشوو دەتوانین بڵێین 3 ڕەنووست ڕێکخست لە 4 ڕەنووسەکانی $1, 2, 3, 4$ ئەوەی تۆ دەستتکەوت بریتییە لە ریزکردنەکانی 3 شت لە 4 شتی بنەڕەتی، بۆ دەستکەوتنی ژمارەی ئەم ریزکردنانە یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە.

دەتوانرێ ڕەنووسی یەکان هەڵبژێری لە		دەتوانرێ ڕەنووسی دەیان هەڵبژێری لە		دەتوانرێ ڕەنووسی سەدان هەڵبژێری لە
4	×	3	×	2

بەمەش ژمارەی ریزکردنەکان دەبێتە $4 \times 3 \times 2 = 24$.

نموونە 5

جێبەجێکردنەکانی
مۆسیقا

باوکی ئاڵان 10 C.D مۆسیقای بە دیاری دایە کوڕەکەی. ئاڵان ویستی گوێ لە سێیانیان بگرێت یەك لەدوای یەك. ئایا ئاڵان چەند هەڵبژاردنی هەیە؟



شیکار

ئاڵان دەتوانێ پەپکی یەکەم هەڵبژێرێت لە 10 پەپك، دووەم لە 9 پەپك، و سێیەم لە 8 پەپك. ئەگەر ئاڵان یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنێت دەبینێت کە: $10 \times 9 \times 8 = 720$ هەڵبژاردنی هەیە.

هەوڵبدە شێرزاد 5 ڕۆمانی کری بۆ ئەوەی سێیانیان بخوێنێتەوە یەك بەدوای یەك لە پشووی هاویندا. شێرزاد بەچەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات؟

Arrangements of *n* Objects Taken *r* at a Times ژمارەی ریزکردنەکانی *r* شت لە *n* شتی بنەڕەتی

ژمارەی ریزکردنەکانی r شت لە n شتی بنەڕەتی کاتی $r \le n$ بریتییە لە $P(n, r) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

نموونە 6

شیلان ویستی 4 پەرتووك لە کتێبخانەکەیدا دابنێ کە لە 10 ڕەفە پێکهاتبوو بەمەرجێك لە یەك کتێب زیاتر لە ڕەفەیەکدا دانەنێت. شیلان بە چەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات.

شیکار

پرسیارەکە دەگەڕێتەوە بۆ ریزکردنی 4 ڕەفە لە بنەڕەتی 10. شیلان ڕەفەی یەکەم لە 10، و دووەم لە 9، و سێیەم لە 8، و چوارەم لە 7 هەڵدەبژێرێت بەمەش ژمارەی ڕێگاکان دەبێتە $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

هەوڵبدە ئاکام 8 قوتووی ڕەنووسکراو و 5 گۆی ڕەنگاوڕەنگی جیاوازی هەیە. ویستی گۆیەکان بخاتە ناو چەند قوتوویەکەوە بەمەرجێك لە گۆیەك زیاتر لە قوتوویەکدا نەبێت. چەند ڕێگای هەیە؟

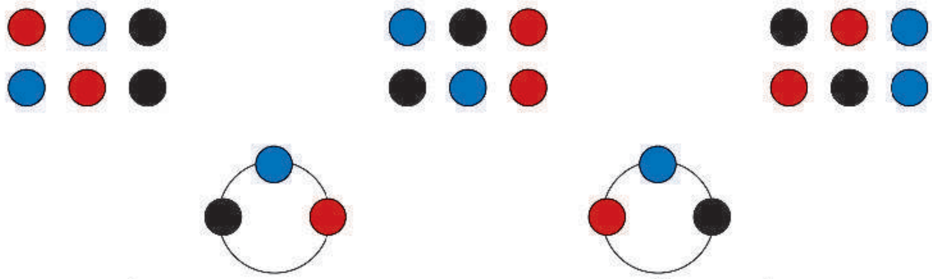
Circular Permutations گۆڕینەکانی بازنەیی

نموونە 7

لە باخچەکەی ڕووناکدا 3 کورسی هەیە: شین وسوور و ڕەش. ڕووناك ویستی ئەو کورسییانە بەریز لە دەوری مێزێکی بازنەیی دابنێ **چەند ڕێگای هەیە؟ ژمارەیان چەندە؟**

● شیکار

ئەگەر سەرنجی گۆڕینە هێڵییەکانی سێ کورسیەکە بدەیت ئەمەی خوارەوەت دەستدەکەوێت



تێبینی بکە کە گۆڕینە هێڵییەکان لە ڕیزی یەکەمدا (شین، سوور، ڕەش) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکهێناوە. و گۆڕینەکان لە ڕیزی دووەم (شین، ڕەش، سوور) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکهێناوە.
کەواتە ڕووناك دوو ڕێگای هەیە بۆ دانانی کورسیەکان بە دەوری مێزەکەدا.

هەوڵبدە چەند ڕێگات هەیە بۆ ڕیزکردنی 4 جۆر لە خواردنی سورەوەکراو لە قاپێکی بازنەییدا؟

ڕاهێنـــــــــان

● بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 چۆن یاسای بنەڕەتی ژماردن یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکان بۆ چوار شت؟

2 چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی یارمەتی دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕێزکردنەکانی چوار شت لە بنەڕەتی پێنج شت؟

● ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 چەند ژمارە دەتوانی بنووسی بەبەکارهێنانی شەش ڕەنووس بەبێ دووبارەبونەوە؟

4 چەند ڕێگات هەیە بۆ بینینی 3 شریتی ڤیدیۆ یەك بەدوای یەك لە بنەڕەتی حەوت شریت؟

5 چەند ڕێگا هەیە بۆ دانشتنی 12 کەس دابنیشێت بەدەوری مێزێکی بازنەیی بۆ خواردنی نانی ئێوارە.

هەژمێربکە

6 $7! - 5$ **7** $6! - 4!$ **8** $(7-5)!$ **9** $(6-4)!$

10 $\frac{8!}{5! \times 3!}$ **11** $\frac{10!}{4! \times 6!}$ **12** $\frac{0! \times 5!}{(4-1)!}$ **13** $\frac{3! \times (7-2)!}{0!}$

● ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ناز 8 ڕەنووسی هەیە دەتوانێت، چەند ژمارە پێکبهێنێت بە، بەکارهێنانی ڕەنووسەکان بەبێ دووبارەبونەوە لەم بارانەی خوارەوەدا.

14 لە 5 ڕەنووس **15** لە 3 ڕەنووس **16** لە 4 ڕەنووس

17 لە 6 ڕەنووس **18** لە یەك ڕەنووس **19** لە 8 ڕەنووس

جێبەجێکردنەکان **کارگێڕی دەزگاکان** یەکێك لە کۆمپانیاکان پێشوازی لە 8 کارمەندی تازەکرد. ژمارەی ڕێگاکانی دابەشکردنیان بەسەر پۆستەبەتاڵەکان دیاریبکە لە هەر بارێك لەم بارانەدا:

X<¤Ä 15 **23** X<¤Ä 10 **22** X<¤Ä 9 **21** X<¤Ä 8 **20**

24 vJ¦eÔî ñW<Wì †UJ! g|U/ ËU"WÙ ÈWJK|ËUÇ ñ¤3 7 v¶fi|Ë WJK|ËUÇ vJ¦ñUÔÅËı ãÊÜÔïædëe|ñ ¤! W|WÙ U~¦ñ bïWÇ v|Wï"U!

25 7 Wì †UJ§|ñU|œ „W|…ñUî¸ vïUë…bïWîñUë Wì p¦bïWîñUë ñWÙ ¤! v¶fi|Ë ÊÜëÜÔïUáî¤ë Wì pÔëW| ñWÙ Èdï«u"…œ vï«e! ñWÖWz ¨W|«œUï«u" Wì Wë…bïWÇ ÊÜëW"UNJÔÄ È…ñUî¸ v§"UNJÔÄ ” Ëuï…ñ ø…ËWïËu!…ñU!ËËœ v! …bïWÇ ÊU|…ñUî¸ ÈdMÔN!ñÜëW! 9 U" dH< vïUëW<Ëuï…ñ …œ

26 X¦d~!¤8 Wì 3 U" 1vïUëW<Ëuï…ñ Wë †UJ! X<Ëñœ ñ«bKÔî vJÔ8ñWÇ v¶fi|Ë ñUÖ“ñ øW<Ëuï…ñ v< ËWz vMÔ<Ëuï ¤! W|WÙ ÈU~¦ñ bïWÇ ÊUfiëW| vÅW! 3 W! œdë ÈWëW8ñWÇ

ËW«b|dÜ

…“«bïWz ñU3 ñË“ ôbïWÇ vïUMÔÙñUëW!W! vïUëW¶ÔÄ vïUë…ñW< ËUï X¦dï…œ ËWz È…ñUî¸ U~¦ñ WïU| ∫WïU¶ÔÄ ÂWz vMÔN!ñUëW! W! vÓM!ËUï …Ë…ñ«u8 ÈWïU|ôbïWÇ ÂWì „W|ô bïWÇ Èdï«u"…œ Wë WJ§|ñU|œ

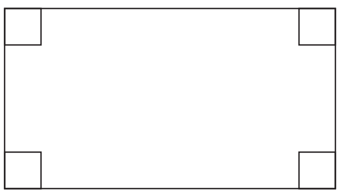
A, B, C, D, E, F

ÈœdJÔ3W§Ô3

ö º MÔÄ **30** öÅWÅ **29** ôñ«uÇ **28** WÅ¤~Ô< **27**

31 …bïWÇ ÊUë…Ë«d! vïUëWïædëe|ñ È…ñUî¸ «bJÔïædë«ñ Wì œdë ÊU|ñ«bÅW! ZïWÖ 7 ‘ “ñ…Ë ø ©ÂW| v< ¨Â…ËËœ ¨ÂWëW|®

…Ë«Ëœ ¤! 5ï«Ëñ



32 v|WAÔëô vJÔï¤"ñUë WÇñUÄ W˜üuÖ ÊUëUÙW! ÈñWÄËWz v¶fi|Ë 36cm ÈWëWÔÔïUÄ ¨48cm ÈWëW|ó¦ñœ W|WÙ ñW<Wì X Ô! …Ëdë …Ë…ñW< Wì †UJ§¶<Ëñœ vì vëW|Ëu"uè Wì „Ëuâ! ÈWÅ¤Öñ«uÇ 4 vM|d!W! V|ñW" WAÔëô È…uÔÅ Èó|ñœ …ËWï«dMÔ¶Åuï ÊUëW|ô «bÔ|«Ëœ Wì ¨«b|Wë…ñW< ñ«uÇ È…ËWz ¤! ¨XÔ! bïWÇ XÔ!…œ WëWÅuÖñ«uÇ ÈWë…Ëd!ô øXÔ!WÙ È…ñU!Wè s|d"…ñËWÖ Wë…Ëu"uè

33 pÔëW| W!ñ«œUÖz ® WJ! ñUJÔÅ WÔ|…ËWJÔÄ W|WAÔëËUÙ ËËœ ÂWz ©WÔï v'ÔÙ ÈWAÔëËUÙ ÊUëWAÔëËUÙ Wì

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

…ËWAÔÄ ¤! 5ï«Ëñ

34 bïWÇ ñW<W! ÊœdJÔÅW!«œ WëWìu8 ÈñW‹J¦ñ ¨œdë ÊUÔ|ñ«bÅW! «bÔÄ vÅ¤" vJÔìu8 Wì WïU| 6 øXÔMÔN§JÔÄ XÔï«u"…œ W˜Wî¤ë bïWÇ Ëu§"UNJÔÄ WïU| ËËœ Wì „W|W˜Wî¤ë ñWÙ «bëW|W˜Wî¤ë

وانەی 3

گونجێنەکان

Combinations



بۆچی؟

گونجێنەکان ڕۆڵێکی گرنگی هەیە لە ژیاندا. بۆ نموونە ڕێگا دەدات بە هەژمارکردنی ژمارەی ئەو تیپانەی پێکدێت لە 3 خوێندکار لە خوێندکارەکانی پۆلی دەیەم.

ئامانجەکان

- ئەو پرسیارانە شیکار دەکات کە گونجێنی تێدایە. هەموو گونجێنەکانی r دانە لە n دانە دیاریدەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندی نێوان گۆڕێن و گونجێنی تێدایە.

لەبیرت بێت کە ڕیزکردن بریتییە لە ڕێکخستنی r شت لە بنەڕەتی n شت لە ڕیزکردنێکی دیاریکراودا. ئەگەر لە ڕێکخستنەکەدا هیچ گرنگیەك نەدرا بەڕیزکردن. ئەوەی دەستمان دەکەوێت پێی دەڵێین گونجێن. گونجێنی r دانە لە بنەڕەتی n دانە بریتییە لە کۆمەڵەیەك کە پێکدێت لە r دانە لە بنەڕەتی n دانە.

ئەگەر ئەم ژمارانەت هەبێت، 1، 2، 3، 4، 5، ژمارەکانی 2، 3، 5 گونجێنی 3 دانە لە بنەڕەتی 5دانە پێکدێنێت. سەرنجبدە کە ژمارەکانی 3، 2، 5 هەمان گونجێن پێکدێنێت بە پێچەوانەی ڕیزکردنەکەوە.

نموونە 1

جێبەجێکردنەکانی

وەرزش

یانەیەکی وەرزشی هەڵبژاردنێکی نهێنی سازدا بۆ هەڵبژاردنی لیژنەیەکی کارگێڕی کە پێکدێت لە سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر و بەرپرسی دارایی و بەرپرسی پەیوەندییەکان. لە نێوان 7 پاڵێوراودا. بۆ وەرگرتنی لیژنەی کارگێڕی یانەکە، چەند لیژنە دەتوانرێ پێکبهێنرێت؟

هەڵبژاردنی بەرپرسی پەیوەندییەکان لە		هەڵبژاردنی بەرپرسی دارایی لە		هەڵبژاردنی ڕازگر لە		هەڵبژاردنی یاریدەدەری سەرۆك لە		هەڵبژاردنی سەرۆك لە
3	×	4	×	5	×	6	×	7

$$7\times6\times5\times4\times3=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{7!}{2!}=\frac{7!}{(7-5)!}=2520$$

نموونە 2

یانە وەرزشییەکە ڕێگای هەڵبژاردنی لیژنەی کارگێڕی گۆڕی بەمەرجێك هەر ئەندامێك لە ئەندامەکان بۆی هەبێت 5 هەڵبژێراو لە حەوت هەڵبژێرێت، بۆ دروستبوونی لیژنەی کارگێڕی بێ دیاریکردنی کاری هەریەکەیان، بۆئەوەی ئەندامانی لیژنە هەڵبژێراوەکە خۆیان کارەکان دابەشبکەن.

شیکاری پرسیارەکان

أ بەچەند ڕێگا دەتوانرێ پێنج ئەندامە هەڵبژێراوەکە لەنێوان خۆیاندا کارەکانیان دابەشبکەن؟

ب چەند لێژنەی سەرپەرشتی ئەندامەکان دەتوانن پێکبهێنن بەرێگای هەڵبژاردنە تازەکە.

شیکار

أ ژمارەی ڕێگاکان بریتییە لە ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەی 5 دانەییەکە کە دەکاتە

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە

ژمارەی لێژنە پێکهاتووەکان = ژمارەی لێژنە هەڵبژێراوەکان × ژمارەی گۆڕینەکانی هەموو لیژنەکە 2520 = ژمارەی لێژنە هەڵبژێراوەکان × 120

ژمارەی لێژنەکان کەدەتوانین هەڵیانبژێرین. $\frac{2520}{120} = 21$ واتا 21 لیژنە.

چالاکی

بەراوردکردنی ڕیزکردنەکان و گونجێنەکان Comparing Arrangements and Combinations

یەکێك لە یانەکان یارییەکی سازکرد لە نێوان ئەندامەکانی بەم شێوەیەی خوارەوە.

- یاریکەر 3 ڕەنووس لە دە ڕەنووس (لە 0 تا 9) هەڵدەبژێرێت و لەسەر بۆردەکە دەینووسێت.
- یاریکەر 3 گۆی ڕەنووسکراو لە 0 تا 9 لە تورەگەیەك ڕادەكێشێت یەك لەدواییەك.
- بۆ ئەوەی یاریکەرەکە بباباتەوە پێویستە ڕەنووسە نووسراوەکان لەسەر بۆردەکە بەهەمان ڕیز ڕابکێشێت.

1. ئارام ڕەنووسەکانی 8، 4، 1 ی هەڵبژارد یەکبەدواییەك. ئەو ئەنجامانەی کە دەبنە هۆی بردنەوەی چین؟
2. ڕێکخەری یارییەکە ڕێساکەی گۆڕی بۆ ئەوەی یاریکەرەکە بباتەوە مەرجی دانا، ئەویش بە ڕاکێشانی سێ ڕەنووسەکە بەبێ بایەخدان بەریزکردن.ئارام یارییەکەی دووبارەکردەوە و سوور بوو لەسەر ڕەنووسەکانی خۆی، ئەو ئەنجامانە چین کە دەبێتە هۆی بردنەوەی؟
3. کام دوو یاری گەورەترین بەختیان هەیە بۆ یاریکەرەکە: یەکەم یان دووەم؟هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

خاڵی چاودێری ✔

گونجێنی r شت لە بنەڕەتی n شت Combinations of n Objects Taken r at a Time

ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە بنەڕەتی n شت کاتێك $r \le n$ بریتییە لە $C(n, r) = {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

بەرەنگاری پەیوەندی نێوان ${}_nP_r$، ${}_nC_r$ چییە؟

نمـــــونـــــه 3

ئاکام پێویستە 3 پەرداخ لە 5 پەرداخ هەڵبژێرێت کە ئاوی ئەم میوانەی تێدایە: لیمۆ، سێو، ترێ، مۆز، ئەنەناس. چەند ڕێگای هەیە بۆ ئەم کردارە؟

جێبەجێکردنەکانی

بازرگانی

شیکار

دەتوانی پەرداخی یەکەم لە 5 پەرداخ و دووەم لە 4 پەرداخ و سێیەم لە 3 پەرداخ هەڵدەبژێرێت. بەڵام هەڵبژاردنی ئاوی لیمۆ و ئاوی مۆز و ئاوی ترێ هیچ جیاوازیەکی نییە لە هەڵبژاردنی ئاوی مۆز و ئاوی ترێ و ئاوی لیمۆ. واتە ڕیزکردن هیچ بایەخێکی نییە لێرەدا ئەمە ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەی ئەو ڕێگایانەی لەبەردەم ئاکام دایە بریتییە لە ڕیزکردنی 3 لە 5 دابەشبێت لەسەر گۆڕینی 3 شت واتە:

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=\frac{5!}{(5-3)!}\div 3!=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=10$$

هەوڵبدە

ئاکام چەند هەڵبژاردنی هەیە ئەگەر وا پێویست بوو 4 پەرداخ هەڵبژێرێت؟

هزرێکی ڕەخنەگرانە

کامیان گەورەترە: ژمارەی ڕیزکردنی 3 لە 5 یان ژمارەی گونجێنەکانی 3 لە 5 ؟

لە دوو نموونەکەی پێشوو ئەوەمان دەستدەکەوێت کە پەیوەندیەك هەیە لە نێوان ژمارەی ڕیزەیەتی r شت لە بنەڕەتی n شت و ژمارەی گونجێنی r شت لە بنەڕەتی n شت.

پەیوەندی لە نێوان ڕیزکردنەکان و گونجێنەکاندا

Relation Between Arrangements and Combinations

ژمارەی ڕیزکردنەکان r شت لە بنەڕەتی n شت = ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە بنەڕەتی n شت × ژمارەی ڕیزکردنەکان r شت.

نمـــــونـــــه 4

لە شیکارکردنی پرسیارێکدا، زۆر جار پێویستیمان بە هەڵبژاردنی شێوازێکی گونجاو دەبێت: ڕیزکردنەکان یان گونجێن.

شێوازێکی گونجاو دیاریبکە بۆ هەریەك لەمانەو لە دواییدا ژمارەکانی هەژمێریکە.

أ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر لە 5 هەڵبژێراو؟

ب چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی 3 ئەندامی لە 5 هەڵبژێراو.

شیکار

أ شێوازەکە لێرەدا شێوازی ڕیزکردنەکانە. چونکە داواکراو هەڵبژاردنی کەسێکە بۆ سەرۆك و ئەوی تریان بۆ یاریدەدەری سەرۆك و سێیەمیان بۆ ڕازگر. $\frac{5!}{(5-3)!}=5\times4\times3=60$

ب شێوازەکە لێرەدا شێوازی گونجێنەکانە چونکە داواکراو کۆمەڵەیەکە لە 3 کەس پێکهاتووە.ژمارەی ڕێگاکان $_5C_3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

هەوڵبدە

چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی دوو کەسی لە نێوان 7 کەسدا؟ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەر لە ئەندامەکانی لیژنەیەك کە لە 7 کەس پێکهاتووە؟

بەکارهێنانی گونجێنەکان لەهەژمێرکردنی ئەگەرەکان
Using Combinations in Probability

نمـــــونـــــه 5

گێلاس دوو گۆی لە تورەگەیەك ڕاکێشا 5 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابوو، ئەگەری ئەوەی دوو گۆ ڕاکێشراوەکە سووربن چەندە؟

شیکار

ئەم ئەگەرە یەکسانە بەڕێژەی ژمارەی ئەو بارانەی کەدوو گۆیە ڕاکێشراوەکە سوور بن بۆ ژمارەی

دانەکانی کۆمەڵەی ئەنجام (بۆشایی نموونە). ژمارەی یەکەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 5 ودووەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 8. ژمارەی یەکەم $_{5}C_{2}=\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ ،ژمارەی دووەم $_{8}C_{2}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$
ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە سوور بن.
$\frac{10}{28}=0.3\,571=35.71\%$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە دوو ڕەنگی جیاواز بن چەندە؟

ڕاهێـــــنــــان

بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 جیاوازی نێوان ریزکردنەکان و گونجێنەکان ڕوونبکەوە. بەنموونەیەك زیاتر ڕوونیبکەوە.

2 پەیوەندی چییە لە نێوان ریزکردنی 5 لە بنەڕەتی 7 و گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7 ؟ئەو پەیوەندیە بنووسە. و ژمارەی گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7 هەژمێربکە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 چەند ڕێگا دەکرێت سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر لە نێوان ئەندامەکانی لێژنەیەکی 6 کەسی هەڵبژێردرێت؟

4 چەند ڕێگا دەکرێت 3 پەرتووك و 4 شریتی مۆسیقا لە هاوڕێیەکت کە 9 پەرتووك و 7 شریتی هەبێت وەربگری؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە هەژمێربکە:

5 $_{7}C_{4}$ **6** $_{8}C_{4}$ **7** $_{10}C_{7}$ **8** $_{9}C_{5}$

9 $_{9}C_{1}$ **10** $_{11}C_{1}$ **11** $_{15}C_{15}$ **12** $_{12}C_{12}$

13 $\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{5!}{4!\times1!}$ **14** $\frac{4!}{3!\times1!}\times\frac{9!}{4!\times5!}$ **15** $\frac{_{6}C_{5}\times_{15}C_{2}}{_{21}C_{7}}$ **16** $\frac{_{14}C_{5}\times_{9}C_{7}}{_{23}C_{12}}$

چەند لێژنە دەتوانرێ پێکبهێنرێت لە هەر یەکێك لەم بارانەی خوارەوەدا.

17 3 ئەندام لە 5 پاڵێوراو **18** 7 ئەندام لە 8 پاڵێوراو

19 8 ئەندام لە 12 پاڵێوراو **20** 6 ئەندام لە 10 پاڵێوراو

تورەگەیەك 5 گۆی سپی و 3 گۆی سەوزی تێدایە ئەگەری ئەم ڕاکێشانانە چین؟

21 دوو گۆی جیاواز لە ڕەنگدا. **22** 3 گۆ دووانیان سەوز و سێیەم سپی بێت

23 4 گۆ دووانیان سپی و دووانیان سەوز بن **24** 5 گۆ سێیان سەوز ودووانیان سپی بێت.

لە پرسیاری 25-28 ڕێگای شیکاری هەریەك لەم بارانە دیاریبکە. «ڕیزکردن یان گونجێن».

25 هەڵبژاردنی 4 پەرتووك بۆ بڵاوکردنەوە لە بنەڕەتی کۆمەڵە پەرتووکێك کە ژمارەیان 302 پەرتووکە.

26 هەڵبژاردنی 9 یاریکەر لە 15 یاریکەر بۆ پێکهێنانی تیپێکی سەبەتە.

27 هەڵبژاردنی چوار پاڵێوراو لە 200 بۆ وەرگرتنی پاداشت لە 100 هەزار دینار و 200 هەزار دینار و 500 هەزار دینار، و ملیۆنێك دینار.

28 هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك بۆ سەندیکایەك کە 100 ئەندامی تێدایە.

جێبەجێکردنەکان

29 **پزیشکی** لە توێژینەوەیەکی نەخۆشییەکانی دڵدا. یەکێك لە توێژەرەوەکان سامپڵێکی هەڵبژارد لە 5 کەس لە نێوان 10 کەس کە وەرزشی ڕاکردنیان ئەنجامدەدا. و 15 کەس ئەم وەرزشەیان نەدەکرد.

أ ژمارەی ئەو پێکهاتانەی لەتوانادایە چەندە؟

ب ژمارەی ئەو پێکهاتانەی پێکدێت لە 3 کەس لەوانەی ئەو وەرزشە دەکەن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان ئەو پێنج پێکهاتانە تەنها 3 یان ئەم وەرزشە بکەن چەندە؟



ڕوانین بۆ دواوە

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

30 $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$ **31** $\frac{2}{x(x-2)}-\frac{x}{x^2-4}$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە:

32 $\sqrt{x+4}=2$

33 $\sqrt{x-1}=3\sqrt{x-2}$

34 $\sqrt{-x}=4\sqrt{-x-2}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

35 بەمەبەستی ناونانی ئەندامەکانی نوسینگەی یانەی بروسك. 5 ناو بە تیروپشك ڕاکێشرا لە نێوان ناوی 8 پاڵێوراو کە پێکهاتبوو لە 8 ئەندامی شەرەف و 22 ئەندامی کارا.

أ ئەگەری ئەوەی پێنج ناوەکە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی 4 ناو لە پێنج ناوەکە ئەندامەکانی شەرەف بن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان پێنج ناوەکە 3 ناویان بەلایەنی کەمەوە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

وانەی 4

کۆکردنەوەی ئەگەرەکان

Adding Probabilities

ئامانجەکان

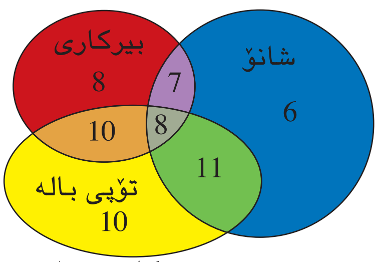
- ئەگەری دووروداوی جیا هەژماردەکات.
- ئەگەری دوو ڕووداو جیانەبن هەژماردەکات.
- ئەگەری دژە ڕووداو هەژماردەکات.

جێبەجێکردنەکان

بۆ خۆشی



بۆچی؟
دەتوانیت کرداری کۆکردنەوە بەکاربهێنێت بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕووادانی دوو ڕووداو یان زیاتر.



لە ئامادەیی ڕزگاریدا سێ جۆر یانە هەیە. یانەی شانۆ لە 32 ئەندام پێکهاتووە و یانەی بیرکاری لە 33 ئەندام پێکهاتووە ویانەی تۆپی باڵە لە 39 ئەندام پێکهاتووە. هەندێ لە خوێندکاران سەر بەیانەیەك زیاترن هەروەك لەم هێڵکاریەی بەرامبەرت ڕوونکراوەتەوە بەرێوەبەر یەکێك لە ئەندامەکانی یانەکانی بەشێوەیەکی ڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە ئەندام بێت بە لایەکی کەمەوە لە دوو یانە چەندە؟ هەندێ

لە ڕووداوەکان جیان ئەگەر یەکێکیان ڕوویدا ئەوا ئەوانی تر ڕوونادەن. ئەگەر زارێك هەڵبدەین ئەو دوو ڕووداوی (دەستکەوتنی ژمارەی تاك) و (دەستکەوتنی ژمارەی جووت) دوو ڕووداوی جیان.

بەپێچەوانەی ئەوە دوو ڕووداوی (دەستکەوتنی ژمارەی جووت) و (دەستکەوتنی ژمارەی کەمتر لە 3)دوو ڕوداوی جیانین چونکە دەستکەوتنی 2 پاسادانی هەردوو ڕووداوکە بەیەکەوە دەکات.

چالاکی

دۆزینەوەی ئەگەری ڕووداني دوو ڕووداو Exploring Two-Events Probability

لەمەودوا پێویستیت بە دوو بەردەزاری ڕەنگاوڕەنگی جیاواز دەبێت.

1. خشتەی خوارەوە بنووسەوە پاشان تەواوی بکە. بەهەڵدانی دوو بەردەزار 10 جار. لەگەڵ وەرگرتنی ئەو دوو ژمارەیەی لەسەر هەردوو ڕووی سەرەوەی دوو بەردەزارەکە دەردەکەوێت.

هەڵدان	بەردەزاری یەکەم	بەردەزاری دووەم	سەرجەم	ئەنجامی لێکدان
1				
2				
3				
⋮				

	أ	ب	ج
$P(A)$			
$P(B)$			
$P(A\cup B)$			
$P(A)+P(B)$			

2. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت تەواوبکە بەسوود وەرگرتن لە خشتەی نموونەی یەکەم و ئەگەری ڕوودانی هەر ڕووداوێك لەم ڕوودانە ڕوونبکەوە.

أ) لەم بارەدا A : «ڕووداوێکە ژمارەی 6 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەرکەوێت» و B «ڕووداوێکە ژمارە 3 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەردەکەوێت».

ب) لەم بارەدا A :«ڕووداوێکە. لەسەر ڕووی زاری یەکەم 6 دەرکەوێت» و B : «ڕووداوێکە کۆی ژمارەی سەر هەردوو زارەکە 7 بێت».

ج) لەم بارەدا A لەسەر ڕووی زاری یەکەم ئەو ژمارەیەی دەرکەوت بچوکترە لە 5 و B ڕووداوێکە (ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارەی سەر دوو زارەکە گەورەترە لە 5).

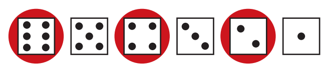
3. بە پشت بەستن بەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە ئایا $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ؟ لە چ بارێکدا ئەم پەیوەندیە ڕاستە؟

خاڵی چاودێری ✔

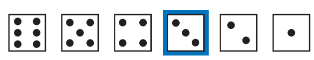
بۆ ئەوەی زیاتر هەستبکەیت بە ئاشکرایی جیاوازی نێوان ڕووداوە جیاکان و ڕووداوە ناجیاکان سەرەنجی ئەمانەی خوارەوە بدە.

دوو ڕووداوی جیا

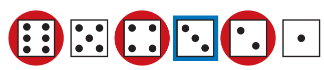
A = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A)=\frac{3}{6}$ 

B = دەستکەوتنی ژمارە 3

$P(B)=\frac{1}{6}$ 

بروانە $A\cap B=\varnothing$ وە $P(A\cap B)=0$

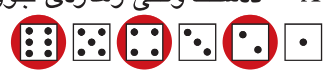
$P(A\cup B)=\frac{4}{6}$ 

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیان. ئەگەری ڕووداوی $A\cup B$ یەکسانە بە کۆی ئەگەری هەردوو ڕووداوەکە

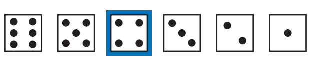
$$P(A\cup B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

دوو ڕووداوی ناجیا

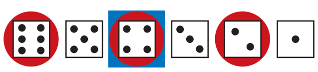
A = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A)=\frac{3}{6}$ 

C = دەستکەوتنی ژمارە 4

$P(C)=\frac{1}{6}$ 

بروانە $A\cap B\neq\varnothing$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A\cup C)=\frac{3}{6}$ 

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیانین.پێویستە ئەگەری ڕووداوی $A\cap C$ لە کۆی ئەگەری دوو ڕووداوەکە دەربکەین.

$$P(A\cup C)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ئەگەری ڕووداوی A یان B   **Probability of A or B**

A ، B دوو ڕووداوی هەمان تاقیکردنەوەی ڕەمەکین

ئەگەر A و B جیابن ئەوا:

$$P(A \text{ یان } B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

ئەگەر A و B جیانەبن ئەوا:

$$P(A \text{ یان } B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

خاڵی چاودێری ✔

کام لە دوو ڕێسایەی پێشوو بۆ هەموو بارەکان بەکاردێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نموونە 1

جێبەجێکردن
ئامار

لە ڕاپرسییەکدا بۆ ڕای گشتی لەبارەی نوێکردنەوەی شێوازە پەروەردەییەکان. نموونەیەك کە لە 100 هاوڵاتی پێکهاتبوون پرسیاریان ئاراستەکرا. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت ئەنجامی ئەم ڕاپرسییە ڕووندەکاتەوە

	نێر	مێ	سەرجەم
لەگەڵ	18	9	27
دژ	12	25	37
بێ ڕا	20	16	36
سەرجەم	50	50	100

یەکێك لەوانەی ڕاپرسییەکەیان ئاراستەکردبوو وبەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی ئەو هاوڵاتییە دژی نوێخوازیی بێت یان هیچ ڕایەکی نەبێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی (دژ) و (بێڕا) دوو ڕوداوی جیان. لێرەدا ئەوەی هەمانە

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{37}{100} + \frac{36}{100} = \frac{73}{100} = 73\%$$

نموونە 2

ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی نێربێت یان لەوانە بێت کە دژی نوێخوازی بێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی (نێر) و (دژ) دوو ڕووداوی جیانین

$P($نێر یان دژ$) = P($نێر$) + P($دژ$) - P($نێر و دژ$)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{37}{100} - \frac{12}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی مێ بێت یان لەوانەبێت کە (بێڕا)ن چەندە؟

دژە ڕووداو Probability of an Event

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ نموونەکەی پێشوو. دوو ڕووداوی (دژ) و (لەگەڵ یان بێڕا) تەنها دوو ڕووداوی جیانین. بەڵکو ڕوونەدانی یەکێکیان واتە ڕوودانی ئەوی تریان لەم بارەدا هەریەکێکیان دژی ئەوەی تریانە **Complement**. بەشێوەیەکی گشتی: دەڵێین ڕووداوی B دژی ڕووداوی A دەبێت کاتێك دوو ڕووداوەکە جیابن ویەکێکیان بە دڵنیاییەوە ڕووبدات.

ئەگەری دژە (تەواوکەری) ڕووداو Probability of the Complement

ئەگەر ڕووداوی B دژە ڕووداوی A بێت ئەوا.

$$P(A) = 1 - P(B) \qquad P(B) = 1 - P(A) \qquad P(A) + P(B) = 1$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئەو هۆیە چییە کە ڕێگات پێدەدات بە نووسینی $P(A) + P(B) = 1$ کاتێك دوو ڕووداوی A و B تەواوکەری یەکترین.

نموونە 3

جێبەجێکردنەکان
بۆ خۆشی

بە گەڕانەوە بۆ ئەو پرسیارەی کە لە سەرەتای وانەدا باسکرا. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەهەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا چەندە؟

شیکار

ڕووداوی (ئەندام لە یەك یانەدا) تەواوکەری ڕووداوی (ئەندام بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا).

کەواتە p (ئەندام تەنیا لەیەك یانە) = 1 − p (ئەندام لە دوو یانەدا بەلایەکی کەمەوە)

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{6+8+10}{60}=\frac{36}{60}=0.6=60\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 نموونەیەك بێنەوە بۆ دوو ڕووداوی جیا، ویەکێکی تر بۆ دوو ڕووداوکە جیانەبن.

2 تەواوکەری ڕووداوی ئەم ڕووداوە چییە: «دەستکەوتنی 1 یان 2 » لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکدا

3 چۆن ئەگەری ئەم ڕووداوە هەژمێردەکەیت: « دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان 3 » لە هەڵدانی بەردەزارێکدا؟

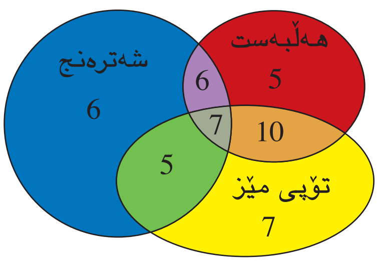
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەنجامەکانی ڕاپرسی بۆ نویکردنەوەی شێوازی پەروەردەیی بکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 4 و5 .

4 ئەگەری ئەو کەسەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ڕای هەبێت چەندە ؟

5 ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی بە هەڕەمەکی هەڵبژێرا نێر بێت یان لەوانە نەبێت کە لەگەڵ نوێخوازی بێت چەندە ؟

6 لە دواناوەندییەکدا سێ یانە هەیە: یانەی شەترەنج 24 ئەندامی هەیە و یانەی تۆپی سەرمێز 29 ئەندامی هەیە و یانەی هەڵبەست 28 ئەندامی هەیە، هەندێ لە خوێندکارەکان سەربەیانەیەك زیاترن. هەروەك لەم هێڵکارییەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە. بەڕێوەبەر ئەندامێکی ئەم یانەی بەڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە بەلایەنی زۆرەوە ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟



ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەڵو بەردەزارێکی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی ئەم ڕوداوانە چەندە؟

7 5 یان 6 ؟

8 1 یان 4 ؟

9 ژمارەی جووت یان3 ؟

10 ژمارەی تاك یان 2 ؟

11 1 یان ژمارەیەك بچوکتر لە 4؟

12 6 یان ژمارەیەك گەورەتر لە 2 ؟

13 ژمارەیەك بێجگە لە یەك؟

14 ژمارەیەك جووت نەبێت؟

15 ژمارەیەکی جووت یان تاك؟

جێبەجێکردنەکان **ئەم خشتەیە ئەنجامەکانی هەڵدانی دوو بەردەزار ڕوونەدەکاتەوە. لە پرسیاری 16 تا 18 خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەوەی کە دوو ڕووداوەکە جیان، و بۆ دۆزینەوە ئەگەری ڕووداوە ئاوێتەکە**

(6 ؛1)	(5 ؛1)	(4 ؛1)	(3 ؛1)	(2 ؛1)	(1 ؛1)
(6 ؛2)	(5 ؛2)	(4 ؛2)	(3 ؛2)	(2 ؛2)	(1 ؛2)
(6 ؛3)	(5 ؛3)	(4 ؛3)	(3 ؛3)	(2 ؛3)	(1 ؛3)
(6 ؛4)	(5 ؛4)	(4 ؛4)	(3 ؛4)	(2 ؛4)	(1 ؛4)
(6 ؛5)	(5 ؛5)	(4 ؛5)	(3 ؛5)	(2 ؛5)	(1 ؛5)
(6 ؛6)	(5 ؛6)	(4 ؛6)	(3 ؛6)	(2 ؛6)	(1 ؛6)

16 دەستکەوتنی سەرجەمێك یەکسان بێت بە 2 یان دەستکەوتنی سەرجەمێك یەکسان بێت بە 4 .

17 دەستکەوتنی سەرجەمێك گەورەتربێت لە 2 یان دەستکەوتنی سەرجەمی گەورەتربێت لە 6 .

18 دەستکەوتنی سەرجەمێك بچوکتربێت لە 3 یان دەستکەوتنی سەرجەمێك بچوکتربێت لە 10 .

19 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 600 هەیە کە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 2 یان 3 دا ؟ ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی کە بە هەڕەمەکی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 600 و توانای دابەشبوونی نیە بەسەر 2 و 3 دا چەندە؟

20 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 500 3 هەیە کە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 5 یان 7 دا ؟ ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی بە هەڕەمەکی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 500 3 و توانای دابەشبوونی نەبێت بەسەر 5 و 7 دا چەندە؟

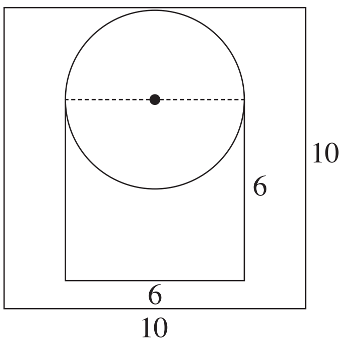
لە پرسیاری 21–26 ئەگەری تەواوکەری ڕووداوی هەریەك لەم ئەگەرانەی خوارەوە بدۆزەوە.

21 $\frac{1}{3}$ **22** $\frac{4}{11}$ **23** 0.782

24 0.324 **25** 0 **26** 1

بەستنەوە

ئەندازە **ئالان تیرەکەی بۆ سەر چوارگۆشە گەورەکە هەڵدا. ئەگەری ئەوەی ئەو تیرە کە هەریەك لەمانەی خوارەوە بپێکێت چەندە.**



27 بازنەکە؟

28 چوارگۆشە بچووکەکە؟

29 چوارگۆشە بچووکەکە بە مەرجێك ئەو بەشەی تێدانەبێت کە هاوبەشە لەگەڵ بازنەکە؟

30 ناوچەی هاوبەش لە نێوان بازنە و چوارگۆشە بچووکەکە یان بازنەکە؟

31 چوارگۆشە بچووکەکە یان بازنەکە؟

جێبەجێکردن

32 **چاودێری جۆری** سندوقێك 35 پارچەی یەدەگی ئۆتۆمبیلی تێدایە، 8 پارچەیان باش نییە، یەکێك لە پشکێنەرانی فەرمانگەی چاودێری جۆری هەستا بەوەرگرتنی 5 پارچە بۆ پشکنینیان. ئەگەری ئەوەی یەکێك لەم پارچانە باش نەبێت چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەمانە بەرێگای ڕوونکردنەوە شیکاربکە لە ڕووتەختی پۆتاندا.

33 $3 < x < 8$ **34** $-14 \le x \le -2$ **35** $-1 < y < 3$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

36 $x^2 - x - 42$ **37** $3x^2 - 16x - 12$ **38** $81x^2 + 18x + 1$

ڕوانین بۆ پێشەوە

39 تورەگەیەك4 گۆی سووری تێدایە ڕەنوسکراون لە 1 تا 4 و 4 گۆی شینی تێدایە ڕەنوسکراون لە 1 تا 4 ، و 4 گۆی سەوزی ڕەنووسکراو لە 1 تا 4. ڕزگار گۆیەکی ڕاکێشا ئەگەری ئەوەی گۆیەکە ژمارە 1 هەڵگربێت چەندە؟ ڕزگار گۆیەکەی گەڕاندەوە بۆ تورەگەکە. ئەم جارەیان گۆیەکی تری ڕاکێشا سوور بوو. ئایا گۆڕانکاری بەسەر ئەگەری ئەوەی کە گۆیەکە هەڵگری ژمارەی 1 بێت چەندە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە.

ڕووداوە سەربەخۆییەکان
Independent Events



بۆچی؟
دەتوانیت یاسای ئەگەری دووڕووداوی سەربەخۆ بەکاربهێنێت بۆ دۆزینەوەی گەلێك لە ئەگەرە گرنگەکان. نموونە بۆ ئەوە ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار لە پۆلێکدا لەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن.



وانەی 5

ئامانجەکان

- هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ یان زیاتر دەکات

پۆلی دەیەم 35 خوێندکار دەگرێتەوە، ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار لەوانە بەلایەنی کەمەوە لەیەك مانگ ولە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە!

بۆ ئەوەی وەلامی ئەم پرسیارە بدەیتەوە، پێویستە بزانیت چۆن جیاوازی دەکەیت لە نێوان ڕووداوە سەربەخۆیەکان و ڕووداوە بەیەکبەستراوەکان و چۆن هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەکەیت. ئەمەت لەم چالاکییەی خوارەوە بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی ڕووداوە سەربەخۆیەکان — Exploring Independent Events

کامەران پارچە دراوێکی کانزایی و بەردەزارێکی هەڵدا.

1. هێمای A دابنێ بۆ ڕووداوی: « دەستکەوتنی شێر » لەکاتی هەڵدانی پارچە پارەکە، ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(A)$ ؟ ×
2. هێمای C دابنێ بۆ ڕوداوی: « دەستکەوتنی ژمارە 3 » لەکاتی هەڵدانی زارەکە ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(C)$ ؟
3. ئایا ڕوودانی یەکێك لەو دوو ڕووداوە کاردەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟هۆیەکەی دیاریبکە.
4. بەشێوەی جووتە ڕێکخراو ئەنجامی هەڵدانی پارچە پارە کانزاییەکە و زارەکە بەیەکەوە بنووسە. بۆ نموونە $(A, 3)$ ئەگەر کامەران شێر و ژمارەی 3 دەستکەوت. لیستێك پێکبهێنە کە هەموو ئەنجامەکانی لە توانادا هەیە لە هەڵدانی پارچە پارەکە و زارەکە. هەژمێری ئەگەری ڕوودانی هەردوو ڕووداوی A و C بەیەکەوە بکە واتا $P(A)\times P(C)$.
5. هەژمێرەی $P(A)\times P(C)$ بکە. ئایا $P(A\cap C)$ یەکسانە بە $P(A)$ x $p(C)$.
6. هێمای D دابنێ بۆ ڕووداوی: « دەستکەوتنی ژمارەی جووت » لە کاتی هەڵدانی زارەکە $P(D)$ بدۆزەرەوە $P(A\cap D)$.
7. $P(A\cap D)$ بدۆزەرەوە بەبەکارهێنانی ئەو لیستەی کە دروستتکردووە لە پرسیاری 4 دا. ئایا $P(A\cap D)$ یەکسانە بە $P(A)\times P(D)$ ؟
8. چیت دەست دەکەوێت لە ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداو بەیەکەوە. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان کارنەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟

خاڵی چاودێری ✔

بە زۆر ڕووداو دەوترێت سەربەخۆن **Independent**. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کارنەکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکانی تر. نموونە بۆ ئەوە هەڵدانی دوو بەردەزار. بەزۆر ڕووداو دەوترێت بەیەکبەستراو **Dependent** ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کاربکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکەی تر یان ڕووداوەکانی تر.

ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ Probability of Independent Events

دوو ڕووداوی A و B سەربەخۆ دەبن تەنها ئەگەر $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ و دوو ڕووداوەکە بەیەکبەستراو دەبن لە بارەکانی تردا.

نموونە 1

خونچە دوو تورەگەی هەبوو یەکێکیان 9 گۆی سوورو 3 گۆی سەوزی تێدابوو و ئەوی تریان 9 گۆی ڕەش و 6 گۆی زەردی تێدابوو. خونچە گۆیەکی لەهەر تورەگەیەك ڕاکێشا. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی یەکەمدا سەوز بێت و گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی دووەمدا ڕەش بێت چەندە.

شیکار

تورەگەی یەکەم

$P(G)=\frac{3}{3+9}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ کاتێك G ڕووداوی «گۆی سەوز» بێت

تورەگەی دووەم

$P(B)=\frac{9}{6+9}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ کاتێك G ڕووداوی «گۆی ڕەش» بێت

لەبەر ئەوەی دوو ڕوداوەکە سەربەخۆن

$$P(G\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$$

ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو لە تورەگەی یەکەم سەوز و لە تورەگەی دووەم ڕەش بێت بریتییە لە $\frac{3}{20}=0.15=15\%$

نموونە 2

خوێندکارەکانی هەر یەکە لە هۆبەکانی A و B لە پۆلی دەیەم نوێنەرێکیان بۆ خۆیان هەڵبژارد بەناوی ئەوانەوە لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندن قسەبکات. دانا لە هۆبەی A کەژمارەیان 18 خوێندکار بوو و زانا لەهۆبەی B کە ژمارەیان 20 خوێندکارە بوو. ئەگەری ئەوەی ئەم دووانە نوێنەربن چەندە؟

شیکار

گریمان M هێمابێت بۆ ڕووداوی (دانا نوێنەربێت) و هێمای T کەزانا نوێنەربێت.

$P(M)=\frac{1}{18}$ $\quad$ $P(T)=\frac{1}{20}$

لەبەر ئەوەی هەردوو ڕووداوی Mو T سەربەخۆن ئەوا.

$$P(M\cap T)=P(M)\times P(T)=\frac{1}{18}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{360}\approx 0.03\%$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

یاسای ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەتوانیت گشتگیری بکەیت بۆ ئەوەی ژمارەیەکی زۆر ڕووداوی سەربەخۆ بگرێتەخۆ ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت لە هەڵدانی بەردەزارێکدا سێ جار بەیەك بەدواییەك بریتیە لە $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

ئەگەری ئەوەی 4 شێرت دەستکەوێت لە هەڵدانی پارچە پارەیەکی کانزایی 4 جاری یەك بەدواییەك، چەندە، یاسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕوودانی n ڕووداو بەیەکەوە کاتێك ئم ڕوداوانە سەربەخۆ بن.

نمـــوونـــــه 3

جێبەجێکردنەکان

بۆخۆشی

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، کرا ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەك مانگ و لە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان کۆمەڵە 5 خوێندکاردا چەندە؟

شیکار

لە گۆشەیەکی جیاوازەوە. سەیری کارەکە بکە دژە ڕووداو بەکاربهێنە. وا دابنێ کە لە پۆلەکەدا دوو خوێندکار نییە کە لەیەك مانگ ویەك ڕۆژدا لە دایك بوون. وای دابنێ کە ساڵەکە 365 ڕۆژە.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی یەکەم هەر ڕۆژێك بێت لە ڕۆژەکانی ساڵ $\frac{365}{365}$.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی دووەم هەر ڕۆژێك بێت لە 364 ڕۆژدا $\frac{364}{365}$.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی سێیەم هەر ڕۆژێك بێت لە 363 ڕۆژدا $\frac{363}{365}$.

بەم شێوەیە بەردەوام دەبێت هەتا خوێندکاری چوارەم و پێنجەم $\frac{362}{365}$، $\frac{361}{365}$.

$$P(\overline{B}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \approx 0.97$$

یاسای ئەگەری دژە ڕووداو بەکاربێنە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەك مانگ و یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن.

(دوو خوێندکار لە هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایك بووبن)P – 1 = (بەلایەنی کەم دوو خوێندکار لە هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایکبووبن)P .

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.97 = 0.03 = 3\%$$

کەواتە، ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار بەلای کەمەوە هەمان ڕۆژی لەدایکبوونیان هەبێت نزیکەی 3% .

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار بەلای کەمەوە لەیەك مانگ ولەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان 7 خوێندکاردا چەندە؟

ڕاهێـــــنـــان

بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1. نموونەیەك بهێنەوە لەسەر دوو ڕووداوی سەربەخۆ و نموونەیەکی تر لەسەر دوو ڕووداوی بەیەکبەستراو؟

2. چۆن ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ بەیەکەوە ئەژمێر دەکەیت؟

3. جیاوازی چییە لە نێوان دوو ڕووداوی جیا و دوو ڕووداوی سەربەخۆ. نموونە بۆئەمانە بهێنەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4. دارا دوو تورەگەی هەیە یەکەمیان 5 گۆی ڕەش و 5 گۆی سپی تێدایە. دووەمیان گۆیەکی سەوز دوو و گۆی سووری تێدایە. دارا گۆیەکی لە هەر تورەگەیەك ڕاکێشا ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی یەکەم ڕەش بێت و لە تورەگەی دووەم سەوزبێت چەندە؟

5. خوێندکارەکانی هەردوو هۆبەی A و B پۆلی دەیەم هەریەکەیان نوێنەرێکی هەڵبژارد کە بە ناویانەوە قسەبکات لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندندا. تارین لە هۆبەی A هەڵبژێرا کە ژمارەیان 22 خوێندکارە وزارا لە هۆبەی B هەڵبژێرا کە ژمارەیان 19 خوێندکارە. ئەگەری ئەوەی هەردووکیان نوێنەر بن چەندە؟

6 یانەیەکی هەڵبەست لە دواناوەندییەکدا 40 ئەندامی هەیە. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خوێندکار لە ئەندامەکانی یانەکە لە یەك مانگ و لە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕووداوەکانی $A,\ B,\ C,D$ سەربەخۆن $P(D)=0.1, P(C)=0.75, P(B)=0.25, P(A)=0.5$ ئەمانە هەژمێربکە.

7 $P(A\cap B)$	8 $P(A\cap C)$	9 $P(C\cap B)$
10 $P(C\cap D)$	11 $P(A\cap D)$	12 $P(B\cap D)$

لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکدا ئایا ئەم دوو ڕووداوانەی خوارەوە سەربەخۆن یان بەیەکبەستراون.

13 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»؛«دەستکەوتنی ژمارەی 2 یان 4 ».

14 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»؛«دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 4 ».

15 «دەستکەوتنی ژمارەی 6 »؛ «دەستکەوتنی ژمارەیەك کەلە 5 بچووکتربێت ».

16 «دەستکەوتنی ژمارەی 4 »؛ «دەستکەوتنی ژمارەیەك لە 3 گەورەتربێت ».

سەیری ئەم چەرخە میلدارەی بەرامبەرت بکە. کاتێك هەشت پارچەکەی لە ڕووبەردا یەکسان بن و چەرخەکە ژمارەکانی 1 تا 8 هەڵگرتووە.ئەگەری هەر ڕووداوێك لەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە کاتی جولانی چەرخەکە سێ جار.



17 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 3 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 5 گەورەترە ڕابوەستێت.

18 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 4 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 6 بچووکترە ڕابوەستێت.

19 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 5 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 7 بچووکترە ڕابوەستێت.

20 میلەکە یەك جار لە بەردەم ژمارە 8 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 3 گەورەترە ڕابوەستێت.

21 ئەگەری ئامادەبوونی کامەران لە ئاهەنگێکدا 80% بێت و ئەگەری ئامادەبوونی هەڵۆ 95% بێت ئەگەری ئامادەبوونی هەردووکیان پێکەوە چەندە، ئەگەربزانیت ئامادەبوونی یەکێکیان کارناکاتە سەر ئامادبوون و نەبوونی ئەویتریان.

22 تورەگەیەك 15 گۆی ڕەنوس کراوی لە 1 تا 15 تێدایە، باوان گۆیەکی ڕاکێشا لە دواییدا گەراندییەوە بۆ تورەگەکە، پاشان گۆیەکی بۆ جاری دووەم ڕاکێشا.

أ ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان ڕایکێشا لە هەردوو جاردا ژمارە 8 بێت چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان ڕایکێشاوە ژمارەی 8 بێت لەیەك جاردا چەندە؟
(یارمەتی: ئەژمێری ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی ژمارە 8 بێت لە یەکەم جاردا ڕاکیشرابێ یا لە دووەم جاردا نەك لە هەردوو جاردا بەیەکەوە)

23 **فرۆکەوانی** تۆمارەکانی یەکێك لە کۆمپانیاکانی فرۆکەوانی پێشانی دەدات کە گەشتەکەیان لە تاران بۆ هەولێر کە لە کاتی خۆیدا دەگات لە 92% ی گەشتەکانیانە. گەشتەکەیان لەهەولێرەوە بۆ عەمان دەردەچێت لە کاتی خۆیدا لە 97% گەشتەکانە. ئاشتی ویستی گەشتێك بکات لە تارانەوە بۆ عەمان بەمەرجێك بە هەولێردا بڕوات، ئەگەری ئەوەی فڕۆکەکەی دەیگوازێتەوە بۆ هەولێر لە کاتی خۆیدا بێت چەندە لە دوایدا بگاتە عەمان لەکاتی خۆیدا؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەگەر x ، y سفر نەبن. ئەم بڕانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە.

24 $(x^{-2}y^3)^2(3xy^0)^3$

25 $(2x^2y^{-2})^{-3}(-x^2y)^3$

26 $\left(\dfrac{3x^2y^{-2}}{5x^2y}\right)^2$

ڕوانین بۆ پێشەوە

27 نیاز 3 پارچە دراوی کانزایی هاوشێوەی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی 3 خەت لە هەر بارێك لەم بارانەی خوارەوە بدۆزەرەوە.

أ باری یەکەم: یەکێك لە ڕووەکانی هەریەك لە پارچەکان شێربێت. (هەرسێ پارچە پارەکە ئاسایی بن)

ب یەك لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. (دوو پارچەکەی تر ئاسایی بن).

ج دوو لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. (پارچە پارەی سێیەم ئاسایی بێت).

وانەی
6

پێوەرەکانی پەرتبوون
Measurments of Dispersion





ئامانجەکان

- پێوەرەکانی پەرتبوون وەک مەوداو لادانی ناوەندی و لیکنەچوون و لادانی پێوانەیی هەژمێردەکات وبەکاریان دەهێنێت.

بۆچی؟

دەتوانیت پێوەرەکانی پەرتبوون بەکاربهێنیت بۆ بەراوردکردنی دوو کۆمەڵە پێدراوی هاوشێوە وەک تێکڕای مانگانە بۆ پلەکانی گەرما لە دوو شاردا.

Dispersion Concept — چەمکی پەرتبوون

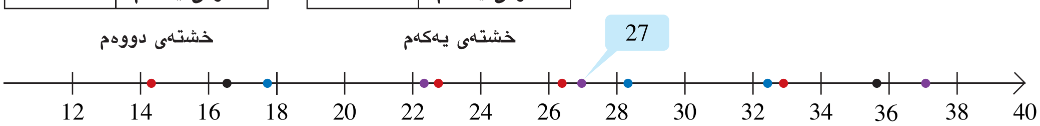
جێبەجێکردنەکان

کەش و هەوا

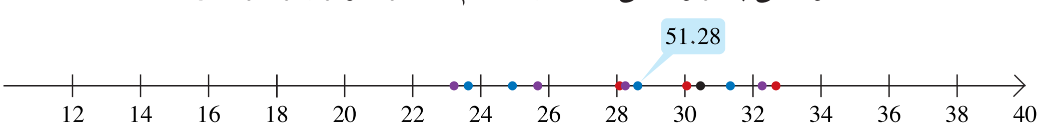
ئەم خشتەی بەرامبەرت تێکڕای پلەکانی گەرما لە 12 مانگدا ڕوونەکاتەوە لە هەردوو شاری ریاز و جدە. ناوەندی پلەکانی گەرما لە خشتەی یەکەمدا دەگاتە 27 بەڵام لە خشتەی دووەمدا ناوەندی پلەکانی گەرما دەکاتە 28.51، ئەگەر بەهاکانی دوو خشتەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان دابنێین دەبینین:

ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری ریاز	
کانوونی دووەم	16.63
شوبات	17.8
ئازار	22.94
نیسان	26.37
مایس	32.61
حزیران	35.62
تموز	37.06
ئاب	36.81
ئەیلول	33.06
تشرینی یەکەم	28.34
تشرینی دووەم	22.5
کانونی یەکەم	14.35

ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری جەدە.	
کانوونی دووەم	23.32
شوبات	23.77
ئازار	25.8
نیسان	28.08
مایس	30.51
حزیران	31.25
تموز	32.7
ئاب	32.25
ئەیلول	31.27
تشرینی یەکەم	30.1
تشرینی دووەم	28.2
کانونی یەکەم	24.9



نواندنی پێدراوەکانی خشتەی یەکەم لەسەر تەوەری ژمارەکان



نواندنی پێدراوەکانی خشتەی دووەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

ناوەندی خشتەی دووەم(28.51) پلەکانی گەرما دەردەبڕێ لە شاری جدە بە شێوەیەکی باشتر لە دەربڕینی

تێکرای خشتەی یەکەم (27) کە پلەکانی گەرما لە شاری ڕیاز ە. پلەکانی گەرما لە جدە نزیکە لە ناوەندەکەی بە پێچەوانەی پلەکانی گەرما لە شاری ڕیاز. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە دەتوانین بڵێین کە کۆمەڵەی بەهاکانی خشتەی یەکەم پەرتبوونەکەی زیاترە لە بەهاکانی خشتەی دووەم.

پێوەرەکانی پەرت بوون Measures of Dispresion

ئامارناسان هەندێ لە پێوەرەکان بەکاردەهێنن بودەربڕینی پێوانی مەودای پەرتبونی کۆمەڵە بەهایەك.

مەودا Range : بریتییە لە جیاوازی نیوان گەورەترین بەها **Maximum Value** – وبچووکترین بەها **Minimum Value** لە کۆمەڵەکە. (مەودا = گەورەترین بەها – بچووکترین بەها)

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ئایا وادەبینی کە مەودا پەرتبوونی کۆمەڵە بەهایەك دەردەبڕێ؟

لادانی ناوەندی Mean Deviation : بریتییە لە تێکرای دوورکەوتنەوەی کۆمەڵە بەهایەك لە ناوەند کە. (لادانی ناوەندی) $= \frac{1}{n}\left(\left|x_1-\bar{x}\right|+\left|x_2-\bar{x}\right|+\ldots+\left|x_n-\bar{x}\right|\right)$

بۆ ئەوەی لادانی نێوانەیی هەژماربکەین بۆ کۆمەڵەی بەهای $x_1, x_2 \ldots, x_n$ لادانی هەریێکیان دەدۆزینەوە لە ناوەندە ژمێرەییەکەوە واتە $\left|x_1-\bar{x}\right|, \left|x_2-\bar{x}\right|, \ldots, \left|x_n-\bar{x}\right|$ پاشان تێکرای ئەو لادانانە دەدۆزینەوە.

$$\text{لادانی نێوانەیی} = \frac{1}{n}\left(\left|x_1-\bar{x}\right|+\left|x_2-\bar{x}\right|+\ldots+\left|x_n-\bar{x}\right|\right)$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

بۆچی ئامار ناسان برى $\left|x_n-\bar{x}\right|$ بەکاردێن بۆ دۆزینەوەی لادانی بەهای x_n و لە ناوەندە ژمێری و $x_n-\bar{x}$ بەکارناهێنن لە جیاتی ئەو.

نموونە 1

جێبەجێکردنەکان

بازرگانی

یەکێك لە کۆمپانیاکان تایە بۆ ئۆتۆمۆبیلەکان دروست دەکات، 5 تاقیکردنەوەی ئەنجامدا لە سەر دوو چەشنی تایە.ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی تۆمارکرا کە هەر تایەك بریویەتی پێش ئەوەی لە کەلك بکەوێت ئەم خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی ئەم تاقیکردنەوانە ڕووندەکاتەوە، بەهەزاران کیلۆمەتر.

تایەی چەشنی 1	66	43	37	50	54
تایەی چەشنی 2	54	49	47	48	52

أ هەریەك لە مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ژمارەی ئەو کیلۆمەترانە بدۆزەرەوە کە هەریەك لەم جۆرە تایانە بریویەتی.

ب ئەم پێوەرانە ئاماژە بۆچی دەکەن دەربارەی هەریەك لەم دوو جۆرە تایانە.

شیکار

أ

تایەی چەشنی یەکەم

مەودا $66-37=29$ واتە $29\ 000$ م

بۆ هەژمێرەی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

تایەی چەشنی دووەم

مەودا $54-47=7$ واتە $7\ 000$ م

بۆ هەژمێرکردنی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$$\bar{x}=\frac{52+48+47+49+54}{5}=50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

x_n	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert$
66	16
43	7
37	13
50	0
54	4
کۆ	40

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:

لادانی ناوەندی

$\frac{16+7+13+0+4}{5}=8$ واتا $8000\ km$

x_n	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert$
54	4
94	1
47	3
48	2
52	2
کۆ	12

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:

لادانی ناوەندی

$\frac{4+1+3+2+2}{5}=2.4$ واتا $2400\ km$

ب تێبینی بکە کە لادانی ناوەندی بۆ تایەی چەشنی 2 کەمترە لە لادانی ناوەندی تایەی چەشنی 1ئەمەش ڕێگات پێیەدات کە بلێیت کە ناوەندی پێدراوەکانی چەشنی 2 زیاتر باوەڕی پێدەکرێت.

هەوڵبدە مەوداو لادانی ناوەندی بۆ پێدراوەکانی تایەی چەشنی سێیەم هەژمێربکە و بەراوردی بکە لەگەڵ پێوەرەکانی کە دەگەڕینەوە بۆ دوو تایەی پێشوو.

تایەی چەشنی 3	64	52	50	49	35

خاڵی چاودێری ئایا دەتوانرێ بۆ دوو کۆمەڵە پێدراوەکانی هەمان مەودایان هەبێت بی ئەوەی لادانە ناوەندییەکانیان وەك یەك نەبن؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە بە نموونە.

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی: دوو پێوەرن بۆ پەرتبوون بەکاردەهێنرێن بۆ بەراوردکردنی پێدراوەکان و شیکارکردنیان.

لێکنەچوون: $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

لادانی پێوانەیی $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ ڕەگی دووجای لێکنەچوون.

نموونە 2 **لادانی پێوانەیی هەژمێربکە بۆ ئەو دوو تایەی کە دوو چەشنی تایەکە لە نموونەی پێشوو بڕیویانە.**

جێبەجێکردنەکان
پیشەسازی

شیکار

تایەی چەشنی یەکەم

$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$

x_n	$x_n-\bar{x}$	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$
66	16	256
43	−7	49
37	−13	169
50	0	0
54	4	16
سەرجەم	0	490

تایەی چەشنی دووەم

$\bar{x}=\frac{54+49+47+48+52}{5}=50$

x_n	$x_n-\bar{x}$	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$
54	4	16
49	−1	1
47	−3	9
48	−2	4
52	2	4
سەرجەم	0	34

لێکنەچوون: $\sigma^2=\frac{490}{5}=98$

لادانی پێوانەیی: $\sigma = 9.9$ واتە $9\ 900\ km$.

لێکنەچوون : $\sigma^2=\frac{34}{5}=6.8$

لادانی پێوانەیی: $\sigma = 2.6$ واتە $2\ 600\ km$.

ئەم ئەنجامانەی لە نموونەی پێشوودا دەست کەوتووە دڵنیامان دەکات کە لادانی پێوانەیی بۆ تایەی 2 کەمترە لە لادانی پێوانەی بۆ تایەی 1 .

هەوڵبدە

لادانی پێوانەیی چەندە بۆ تایەی 3 .

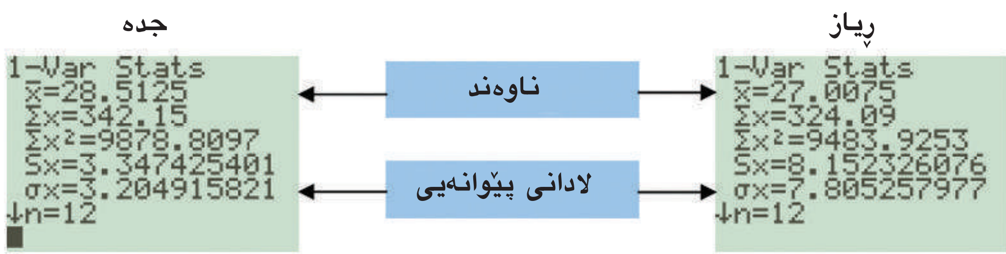
خاڵی چاودێری ✔

ئەگەر لادانی پێوانەیی بۆ تایەی چوارەم یەکسان بێت 1 500km. لەبارەی ئەم تایە چی دەڵێیت بە بەراوردکردنی لەگەڵ دوو تایەی 1 ، 2 ؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

کام دوو پێوەر زیاتر بەکاردێت: لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی؟هۆی وەڵامەکەت لێکبدەوە؟
بەگەڕانەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لە دوو شاری ڕیاز و جدە.ئەم خشتەیەی خوارەوە پێوەرەکانی پەرتبوون ڕووندەکاتەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لەم دوو شارەدا.

پێوەر	ڕیاز	جدە
مەودا	22.71	9.38
لادانی ناوەندی	6.91	2.83
لێکنەچوون	66.46	11.2
لادانی پێوانەیی	8.15	3.35



ئەوە مانای ئەوەیە کە ناوەندی پلەی گەرما پەرتبوونەکەی کەمترە لە جدە تا ڕیاز لە بەرئەوەی لادانی پێوانەیی شاری یەکەم کەمترە لە لادانی پێوانەیی شاری دووەم.

ڕاهێـــــنـــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ژمارەیەکی سالب نین؟
2. پەیوەندی لە نێوان لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ڕوونبکەرەوە. ئایا لادانی پێوانەیی هەمیشە کەمترە لە لێکنەچوون؟ وەڵامەکەت لێکبدەوە.
3. بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی زیاتر پەرتبوون دەردەخەن وەك لەمەودا؟

ڕاهێنان و ئاڕاستەکراو

جێبەجێکردنەکان

ئاری	توانا
81	98
84	68
88	99
82	59
85	96

4 **تاقیکردنەوە** ئەم خشتەیەی بەرامبەر نمرەکانی دوو خوێندکار لە 5 تاقیکردنەوە ڕووندەکاتەوە. مەوداو لادانی ناوەندی بۆ نمرەکانی هەردوو قوتابی ئەژمێربکە. وە ڕوونی بکەوە کە ئەم پێوانانە چی دەگەیێنن؟

5 لادانی پێوانەیی بۆ نمرەکانی ئەو دوو خوێندکارە ئەژمێربکە.

ڕاهێنانی جێبەجێکردن

مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە.

6 8; 10; 3; 9; 10

7 1; 2; 4; 2; 6

8 31; 103; 34; 98; 107; 23

9 32; 23; 68; 74; 26; 93

10 2; 13; 9.4; 7.3; 12.3; 8.6; 7.6

11 1; 11; 14.2; 8.4; 12.2; 15.2; 10.9

12 −1.22; 4.35; −2.42; 2.33; 4.66

13 8.72; 7.43; 2.92;−3.56; 8.78

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە.

14 9; 10; 10; 8; 7; 11; 12; 9

15 8.1; 10.3; 3.4; 9.8; 10.7

16 −3; 2; −5; 4; −2; 8; 9;−1

17 2; 4; −8; 8; 7; −2;−4; 3; 7

لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ئەژمێربکە، کام پێوەر لەم دوو پێوەرانە کەمتر پابەندە بەبەهای دەستکەوتووەوە؟

18 20; 30; 40; 500

19 0; 500; 510; 520

بەرەنگاری

20 دوو کۆمەڵە بەها پێك بهێنە کە هەمان مەودایان هەبێت. ولادانی پێوانەکانیان جیاواز بێت

21 ئایا دەبێت لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك یەکسان بێت بە سفر؟ئەگەر ئەوە لە توانادایە، مەرجەکانی بەدی هێنانی دیاریبکە. نموونەیەك بەکاربهێنە بۆ باسەکەت.

بەستنەوە

22 **گۆڕانکاری** چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر ژمارەیەکی دیاریکراوی a بخرێتە سەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە؟ چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە لە ژمارەیەکی دیاریکراوی وەك a بدرێت؟

وەرزش ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارە پێوانەییەکان (بە خولەك و چرکە و بەشەکانی سەد لە چرکەدا) بۆ کوڕان وکچان ڕووندەکاتەوە کە بەشداریان لە پێشبرکێیەکی هەزارمەتریدا کرد بۆ خلیسکاندن لەسەر بەفر.



1998	1994	1992	1988	1984	1980	1976	
1:47.87	1:51.29	1:54.81	1:52.06	1:58.36	1:55.44	1:59.38	كوڕان
1:57.58	2:02.19	2:05.87	2:00.68	2:03.42	2:10.95	2:16.58	كچان

23 ناوەند و ناوەڕاستە بۆ ژمارە پێوانەییەكانی كوڕان وكچان هەژمێربكە.

24 مەوداو لادانی پێوانە بۆ كوڕان وكچان هەژمێربكە: بەو پێوەرانە دەربارەی ژمارە پێوانەییەكان كوڕان وكچان چی دەڵێیت؟

25 لادانی پێوانەی بۆ كوڕان وكچان چی دەڵێن؟

ڕوانین بۆ دواوە

بەبەكارهێنانی یاسا، دوو ڕەگی ئەم دوو هاوكێشە دووجایانە بدۆزەرەوە. وەڵامەكەت نزیكبكەوە بۆ نزیكترین دە نزیكبكەوە.

26 $3x^2 = 10x + 1 = 0$

27 $2x^2 + 12x - 4 = 0$

ڕوانین بۆ پێشەوە

28 زۆرجار ئامارناسان پەنادەبەن بۆ بەكارهێنانی سامپلێك بۆ توێژینەوەی كۆمەڵە بەهایەك، بۆ ئەمەش دەست بەكار دەبن لە پێوەرەكانی ئاماری سامپلەكە هەمووی. ئەوان وای دادەنێن كە ناوەندی نموونەكە ناوەندی كۆمەڵەكە دەردەخات. بەڵام بۆ لادانی پێوانەیی ئەوان لێكنەچوونی سامپلەكە هەژمێر دەكەن بە یاسایەك كەمێك جیاوازە لەگەڵ یاسای هەژمێركردنی لێكنەچوونی كۆمەڵەكە. ئەوانە ئەم یاسایە بەكاردەهێنن.

لێكنەچوونی سامپلەكە $= \frac{1}{(n-1)}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

أ لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم نموونەیە هەژمێربكە. 12 ;5 ;16 ;18 ;15

ب بۆ مەبەستی هەژمێركردنی ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەكان لە خێزانێك. ئەنجوومەنی شارەوانی شارێك هەستا بە بەكارهێنانی سامپلێك كە لە 10 خێزان پێكهاتبوو بە هەڕەمەكی هەڵبژێرابوون. لە وەرگرتنی ڕاپرسی لەم سامپلە گەیشتنە ئەم ژمارانە:
2; 3; 2; 1; 1; 4; 2; 1; 3; 4 ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەكان لای یەك خێزان بخەملێنە لەگەڵ لادانە پێوانەییەكەی.



ئەی گەشتیار لەگەڵ خۆتم بەرە

لەگرنگترین کێشەکانی بەرەو ڕووی کۆمپانیاکانی فرۆکەوانی دەبنەوە کێشەی ڕێکخستنی ڕێکوپێك بۆ کرداری تۆمارکردنی گەشتیارەکان و کەلوپەلەکانیانە. بۆ گەیشتن بە باشترین چارەسەر بۆ ئەم کێشانە پلاندانەرەکانی ئەم کۆمپانیایانە پەنا دەبەنە بەر ئەنجامدانی کردارە ئامارییەکان و توێژینەوەی ئەنجامەکان بەکرداری بیرکاری، لەوانەش هەژمارکردنی ئەگەرەکان.
لەمەودوا کۆمپانیاکە هەڵدەستێت بەسێ چالاکی لە بارەی کێشەی تۆمارکردنی گەشتیارەکان.

چالاکی 1

ئامارناسانی کۆمپانیاکە بەلایانەوە گرنگە توێژینەوەی تەواوبکەن لەسەر ئەو کاتەی کە کرداری تۆماری گەشتیارەکان پێویستیەتی.و شایەنی باسە لێرەدا ئاماژە بۆ ئەوە بکەین کە ئەم کاتە لە گەشتیارێکەوە دەگۆڕێ بۆ گەشتیارێکی تر. بە هۆی جیاوازی بارودۆخی گەشتیارەکان.
ئامارناسەکان دەستیانکرد بە لێکۆڵینەوەی کاتی خایەنراو بۆ تۆمارکردنی هەر گەشتیارێك لەو پەنجا گەشتیارەی گەیشتونەتە نووسینگەی تۆمارگەکە، لە نێوان کاتژمێر 1:00 و کاتژمێر 1:10 و ئامارناسان گەیشتنە ئەم ئەگەرانەی کە لەم خشتەیەدا ڕوونکراوەتەوە

کاتی خایەنراو بە چرکە	10	20	30	40	50	60
ئەگەر	0.052	0.132	0.158	0.135	0.123	0.104

کاتی خایەنراو	70	80	90	100	011	120
ئەگەر	0.058	0.034	0.116	0.050	0.026	0.012

کاتەکان نزیککراونەتەوە لە نزیکترین چەند جارە لە دە چرکەدا، و ئەگەرەکان بۆ نزیکترین بەش لە هەزار. خشتەکە بەم واتەیە دەخوێنرێنەوە ئەگەری کاتی تۆمارکردنی گەشتیارەکە لە 10 چرکەدا بریتیە لە 0.052 وئەگەری کاتی پێویست لە 20 چرکەدا دەکاتە 0.132 .
ئامارناسەکان دەیانەوێ ئەگەری کاتی پێویست بۆ تۆمارکردنی 50 گەشتیارەکە زۆرتربێت لە 50 خولەکدا. ڕێگای یەکەم بۆ دیاریکردنی ئەمە. پێویست دەکات بە تۆمارکردنی هەموو ئەو کاتانەی کە ژمارەیەکی زۆر لە گەشتیارەکان پێویستیان بووە و پوختەکردنی ئەنجامەکە؟ بەڵام ئەم ڕێگایە پێویستی بە کات و توانا و تێچوون هەیە لەبەر ئەوە پەنایان بردە بەر وەك **نواندن** **Simulation** . چۆن هەستان بەم لێکچونە؟
پەنایان بردەبەر ئەو وردەکاریانەی کە ئەگەرەکانی پێ هەژمارکرابوو لە خشتەی پێشوو لەبەر ئەوەی وردەکارییەکە نزیککرابۆوە بۆ نزیکترین بەش لە هەزار.



بریاریاندا کە گەیشتنی 1000 گەیشتیار وەك یەك لێکردن بکەن بۆ ئەوەی بگەنە ئەو مەبەستە. هەستان بە کۆکردنەوەی ژمارەکان لە 1 بۆ 1000 لە **چەشنەکاندا**.

بەپێی ئەگەرەکانی خشتەی پێشوو وایان دانا کە ژمارەکان لە 1 بۆ 52 بەرامبەری ئەگەری 0.052 دێت. و ژمارەکان لە 53 بۆ 184 (132 ژمارە) بەرامبەر ئەگەری 0.132 و بێت و هەروەها...

خشتەکەی بەرامبەر تەواو بکە

کات	ئەگەرەکان	تۆمارکردنی گەشتیار
0	0	000
10	0.052	052–001
20	0.132	184–053
30	0.158	342–185
⋮	⋮	⋮

چۆن ئەم خشتەیە بەکار دەهێنێت؟ داوا بکە لە بژمێری ڕونکردنەوەیی بەهەڕەمەکی ژمارەیەکت بداتێ بکەوێتە نێوان 1 و 1000 کە ئەو دوو ژمارەیەی تێدابێت. وا دابنێ کە ئەو ژمارە هەڕەمەکییە گەیشتنی گەشتیارەکە بۆ نوسینگەی تۆمارکە بنوێنێ. خشتەی پێشوو بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی ئەو کاتەی کەگەشتیارەکە ویستویەتی بۆ تۆمارکردن.

ئەگەر ژمارە هەڕەمەکیەکە 122 بێت بۆ نموونە وادابنێ ئەو کاتەی کە گەشتیارەکە پێویستیەتی بۆ تۆمارکردنی 20 چرکەیە چونکە ژمارە 122 دەکەوێتە نێوان هەردوو ژمارەی 53 و 418 لە ستونی سێیەمدا.

چالاکی 2

کاتی گەیشتنی 50 گەشتیار بۆ نووسینگەی تۆمارگە لە نێوان کاتژمێر 1:00 و کاتژمێر 1:10 هەڵدەستیت بەوەی (وەك یەکێیان لێ بکەیت) بە داواکردن لە بژمێرەکە 50 ژمارەی هەڕەمەکیت بداتێ ئەوەی کە دەستتکەوتووە لەم خشتەیەی بەرامبەرت ڕێکبخە.

1. بژمێری ڕونکرنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دەستکەوتنی 50 ژمارەی هەڕەمەکی کە بکەوێتە نێوان1 و 1000 و ئەم دوو ژمارەیە خۆشیانی تێدابن.
2. ستوونی دووەم لەخشتەکەدا تەواوبکە.
3. ئەو خشتەیەی کە دروستتکردوە لە چالاکی یەکەم بەکاربهێنە. بۆ تەواوکردنی ستوونی سێیەم. نموونە: ئەگەر ژمارە هەڕەمەکیەکە 179 بێت ئەو کاتەی کە پێویستە دابینێت لە ستوونی سێیەم بەرامبەر 179 دەکاتە 20 چرکە.

گەشتیار	ئەو ژمارە هەڕەمەکییە گشتیارەکە دەنوێنرێت	کات
1		
2		
3		
⋮		
49		
50		

چالاکی 3

1. نواندنی گەیشتی 50 گەشتیار کە بۆ نوسینگەی تۆمارگە 10 جار دووبارەبکەوە. ئەگەری کاتی پێویست بۆ تۆمارکردنی گەشتیارەکان کە لە 50 خولەك زیاترە بخەملێنە.
2. تێبینیت کرد لە کاتی ئیشکردنت لەم وانەیەدا چارەسەرکردنی کاری تۆمارکردنی گەشتیاران ئاسان نییە. ئایا دەتوانیت لەسەرەتایی دەستپێکردنت بەکاری ئەم پرۆژەیە نمونەیەك بدەی لەسەر بارێکی تر کە بتوانرێ نواندن بەکاربهێنرێت بۆ دیاریکردنی ئەگەرەکان؟ ئەمە ڕوونبکەرەوە.

6

پێداچوونەوەی بەش

1 سۆزان گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 3 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابوو ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟

2 ئاواز گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 10 گۆی ڕەشی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاکیشراوەکە سوور بێت چەندە؟

ئاهەنگێك لە نێوان کاتژمێر 8:00 د.ن و 8:30 د.ن دەست پێدەکات ئەگەری گەیشتنی یەکەم میوان بدۆزەرەوە لەنێوان.

3 8:00 د ن و 8:05 د ن ؟

4 8:12 د ن و 8:18 د ن ؟

5 8:21 د ن و 8:24 د ن ؟

6 چەند وشەی نهێنی لە 4 پیت دەتوانیت پێکبهێنی بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی بەبێ دووبارەبوونەوە؟

7 لە 4 پیت چەند وشەی نهێنی دەتوانیت پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی لەگەڵ ڕێگادان بە دووبارە بوونەوە؟

8 بەچەند ڕێگا دەتوانیت 6 شەشپاڵووی ڕەنگ جیاواز لە ڕیزێکدا ڕیزبکەی.

9 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو کتێب لە 5 کتێب هەڵبژێری ولەسەر ڕەفەکە ڕیزیانبکەیت.

10 بەچەند ڕێگا 5 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

11 بەچەند ڕێگا 8 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

12 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو پەرتووك هەڵبژێری لە نێوان 10 پەرتووکدا؟

دلۆڤان بەردە زارێکی هەڵدا. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە

13 دەستکەوتنی ژمارەی 4 یان 7

14 دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 6

15 دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان گەورەترە لە 4

16 دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان بچووکترە لە 4

17 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 1

18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 2

ئەگەری ئەم ڕووداوانە هەژماربکە.

19 لەدایکبوونی 3 منداڵی کوڕ یەك بەدوای یەك لە نەخۆشخانەی لە دایکبوون

20 دەستکەوتنی دوو ژمارەی جووت لە هەڵدانی دوو بەردەزار.

21 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە. 3، 2، 3، 5، 7، 5.

مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە

22 14; 11; 8; 14; 4; 12; 10; 6

23 20; 22; 15; 14; 13; 17

24 2; −3; 9; −7; 6; 3

25 . 21; 24; −22; 13; 12; −8; 4

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە.

26 20; 19; 16; 14; 13; 11; 18; 15; 12; 10

27 160; 80; 180; 130; 140; 100

38 14; 13; 11; 9; 7; 14; 12; 9; 8

29 2; 20; 18; 12; 6; 4; 3; 2; 12; 4; 3

6 تاقیکردنەوەی بەش

ئەگەری هەر ڕووداوێك لەمانە دیاریبكە

1 گۆیەك لە تورەگەیەك ڕاكێشرا كە 4 گۆی سوور و 4 گۆی سەوزو 4 گۆی شین و 40 گۆی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاكیشراو سوور بێت.

2 ڕاكێشرانی گۆیەكی سەوز لە تورەگەیەك كە 8 گۆی سەوز و 6 گۆی سووری تیدابوو لە كاتی ڕاكیشانی یەك گۆ.

3 دەستكەوتنی ژمارەی تاك لە هەڵدانی بەردەزارێك.

4 **ڕەنووسكردن** ڕەنووسكردنی پلیتی مۆڵەتی ڕاوكردن لە دوو پیتی جیا لە بیست و هەشت پیتەكانی زمانی عەرەبی و 8 ڕەنووسی جیاواز لە 10 ڕەنووسە بنەڕەتییەكە. ژمارەی ڕەنووسكراوەكانی كە لە توانادایە چەندە؟

ئەنجامی ئەم برانە بدۆزەرەوە.

5 $12! - 7!$

6 ${}_8P_3$

7 بەچەند ڕێگا دەتوانرێ سەرۆك وبارێدەدەری سەرۆك ڕازگری لێژنەیەك هەڵبژێری كە پێكهاتووە لە 24 ئەندام؟

8 ژمارەی گۆڕینەكانی وشەی (كوردستان) چەندە؟

9 **وەرزش** بەچەند ڕێگا دەتوانیت 3 گۆی ڕەنگ جیاواز بەشبكەیت بەسەر 32 سەندوقی ڕەنووس كراودا ؟

ئەمانە بدۆزەرەوە

10 ${}_8C_3$ **11** ${}_8C_8$

12 $\frac{{}_8C_5}{{}_5C_3 \times {}_5C_2}$

13 **بازرگانی** چێشتخانەیەك ژەمێك خواردن كەپێكدێت لە هەڵبژاردنی 3 قاپ خواردن لە نێوان 7 قاپدا میوانێك هەڵبیژێرێت ئەم هەڵبژاردنە بە چەند ڕێگا دەبێت؟

بەترۆس گۆیەكی ڕاكیشا لە تورەگەیەك كە 12 گۆی هاوشێوەی تێدابوو ڕەنووسكراون لە 1 تا 12 .ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاكیشراوەكە یەكێك لەم ژمارانە هەڵگرێت چەندە.

14 ژمارە 7 یان ژمارەیەكی جووت.

15 ژمارەیەكی خۆبەش یان ژمارەیەكی چەند جارەی 4 .

16 ژمارەیەكی تاك یان ژمارەیەك چەند جارەی 5 بێت.

17 ژمارەیەك گەورەتربێت لە 8 یان ژمارەیەك چەند جارەی 3 بێت.

18 ژمارەیەكی جووت یان جووت یان بچووكتر بێت لە 6 .

ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە.

19 سیروان پارچە دراوێكی كانزایی و زارێكی هەڵدا. ڕووداوەكە دەستكەوتنی خەتێك و ژمارەی 5 بێت.

20 دەزگای بۆشایی ئاسمان كاتێكی هەڵبژارد بۆ هەڵدانی مەكۆكێكی بۆشایی لە هەفتەی داهاتوودا. ڕوودەدات كە پێویستە لە ڕۆژی سێشەممە بێت لە نێوان كاتژمێر1پێش نیوەڕۆ و كاتژمێر 2 پێش نیوەڕۆ.

بچووكترین بەها و گەورەترین بەها و مەودا بۆ هەریەكە لەم كۆمەڵە پێدراوانە دیاریبكە.

21 34; 65; 32; 19; 28; 23; 45; 59; 24; 18; 34; 41; 19; 23; 54; 42; 27; 25; 39 .

22 7; 5; 8; 2; 6; 2; 5; 6; 1; 4; 9; 8; 5; 3

مەودا ولادانی ناوەندی بۆ هەر یەكە لەم كۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە

23 13; 11; 9; 7; 5; 3

24 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر یەكە لەم كۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە.

25 13; 11; 9; 7; 5; 3 .

26 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

27 چی دەڵێیت دەربارەی كۆمەڵە بەهایەك لادانە پێوانەكەی سفر بێت؟

6

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەم جووتە ڕێکخراوانەی خوارەوە ئەم سستەمە ساغدەکاتەوە $\begin{cases} 2y+x \le 6 \\ y-3x \ge 4 \end{cases}$

أ $(0, 5)$ ب $(-1, 2)$

ج $(1, -1)$ د $(0, 0)$

2 شیکاری لاسەنگەی $2(x+2)-7 < 8x+15$ بریتییە لە

أ $x > -3$ ب $x < -3$

ج $x > 2$ د $x < 2$

3 بۆ ئەوەی ئەم برە $x^2 - 12x$ ببێتە دووجای تەواو دەبێت چی بخریتە سەری

أ 6 ب -6 ج 36 د -36

4 کام دەربڕین لەمانەی خوارەوە باسی پەیوەندی نێوان ئەم دوو ڕاستەهێڵە دەکات $y = -2x - 3$ $y = \frac{1}{2}x$

أ دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیین ب دوو ڕاستەهێڵی ستوونین

ج ئەستوونن لەگەڵ یەکتر د تەریبن بەیەکتری

5 سادەترین شێوەی $\left(-\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ دەکاتە.

أ $\frac{1}{25}$ ب $-\frac{1}{25}$

ج 25 د -25

6 پۆوتانی خاڵی ناوەڕاستی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دوو سەرەکانی $(-4, -1)$ ، $(2, -7)$ بریتییەلە

أ $(-1, -3)$ ب $(-3, 3)$

ج $(-1, -4)$ د $(-3, -3)$

7 کامیان شێوەی گشتی ئەم برەیە دەنوێنێت.

$(5x^3 - 2x^2 + x - 10) + (2x^3 - 3x - 1)$

أ $3x^3 - 2x^2 - 4x - 9$

ب $3x^3 + 2x^2 + 4x - 9$

ج $7x^3 - 2x^2 - 2x - 9$

د $7x^3 - 2x^2 - 2x - 11$

8 ئەم برە بەسادەترین شێوە بنووسە

$\frac{x^2+3x-4}{x^2} \times \frac{x^2-2x}{2x+8}$

9 ئەو هاوکێشەیە بنووسە لە سەر شێوەی لاری یەکتربرینی بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم دوو خاڵە دا دەڕوات $(3, -4)$ $(2, 7)$

10 سفرەکانی نەخشە $f(x) = x^2 - 8x + 12$ بدۆزەوە.

11 ئەم برە ئەگەر لەتوانادابوو شیتەڵبکە. $5x^2 + 10x - 40$

12 ئەم برە شیتەڵبکە $8x^3 + 64$

13 هاوکێشەکانی هەموو ڕاستەهێڵە دەرکەنارەکانی ئاسۆیی و ستوونی ئەم نەخشە ڕێژەییە بنووسە $f(x) = \frac{(x+2)^2}{3x}$

14 ئەم برە ئەگەر شیتەڵ دەکرێ، شیتەڵبکە.

$6x^2 + 8x - 15x - 20$

15 ئەم برە بۆ سادەترین شێوە کورت بکەرەوە. $\dfrac{\frac{x+4}{9x^2}}{\frac{x-6}{3x^4}}$

16 کۆمەڵەی شیکاری ئەم هاوکێشەیە بدۆزەرەوە $\frac{6x+2}{3x} = 6$

17 لاری ئەم ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە $y = 8$

18 چی پێویستە بخرێتە سەر بڕی $x^2 + 8x$ بۆ ئەوەی ببێتە دووجای تەواو.

چالاکییەکانی دەرەوەی پۆل.یانەی شەترەنج لە قوتابخانەیەکدا لە 12 ئەندام پێکهاتوە کە **5** گەورە و **7** یان بچوکە

19 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بە لایەنی کەمەوە 3 گەورەی تێدابێت.

20 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێت پێکبهێنرێت بە مەرجێك بەلایەنی کەمەوە 3 **بچووکی** تێدابێت.

21 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بەلایەنی زۆرەوە 3 کوڕی تێدا بێت.

بۆ خۆشی کۆمەڵەی چاودێری کۆمەڵایەتی بە پێی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەملیۆنان دینار یارمەتی هەژارانیدا لە ماوەی 12 مانگدا.

14.8	2.5	2.9	3.0	3.7	4.0
5.7	4.8	4.2	5.6	6.1	10.6

22 ناوەندی خەرجی مانگێك بدۆزەرەوە.

23 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەرەوە.

بەشی حەفتەم

ئەندازە

Geometry

1. هەندێك لە دەسپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس.
2. ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان لە بۆشاییدا.
3. وێنە بینراوەكان.
4. چەندلا ڕێكەكان.
5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.
6. بازنە.

پرۆژەی بەشەكە

پێداچوونەوە

تاقیكردنەوەی بەش

تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو

بەشی 7

ئەندازە Geometry



ئەندازە زانستێکی کۆن و تازەیە لە یەك کاتدا. دووهەزار ساڵە ئەندازە بەبێ دابڕان پێشدەکەوێت. ئەندازە لەکۆنەوە دەستیپێکردووە و جێگای خۆی کردەوە لە کارەکانی ئەقلیدس و بەبەردەوامی لە برەودابوو تا دەگاتە کارەکانی فەیلەسوف و بیرکاریزانی فەرەنسی ڕینە دیکارت، تاکو گەیشتە سەردەمی تازە بەبەکارهێنانی بژمێرەکان و بژمێرە پێشکەوتووەکان. لەم بەشەدا فێری پەیوەندییە بنەڕەتیەکان دەبیت کە پێکهێنەرەکانی ئەندازە لە ڕووتەخت و بۆشاییدا بەیەکەوە دەبەستێتەوە. هەروەها فێردەبیت چۆن تەنەئەندازە سێ دوورییەکان وێنە بکێشیت لە ڕووتەختێکدا بەوشێوەیەی بینەرێك دەیبینێت.
هەروەها جێگۆڕکێیەکی ئەندازەیی نوێ فێردەبیت کە جیاوازە لەو جێگۆڕکێیانەی فێری بویت، بەوەی دووریەکان پارێزراونابێت و هەندێ شتی تریش فێردەبیت.

وانەکان





دەربارەی پرۆژەی بەش

پێشتر بیرکاریزان جۆرج بێڵ ڕێسایەکی بۆ ڕووبەری چەندلا دۆزیبووەوە کە جیاوازبوو لە ڕێساکانی پێش خۆی. لەمەودوا کاغەزی خاڵدار (بەیانی) بەکاردەهێنێت و هەندێك خاڵ بەیەکدەگەیەنیت بۆ ئەوەی چەندلایەکت دەستکەوێت. و لەمەودوا شێوازێکت دەست دەکەوێت کە ڕێگات پێدەدات بەداڕشتنی ڕێسایەك بۆ هەژمێرکردنی ڕووبەری ئەم چەشنە چەندلایانە. لەدوای کۆتایی هاتنی ئەم پرۆژەیە لە تواناتدا دەبێت.

- ڕووبەرەکانی هەندێك لە شێوە ئاڵۆزەکان هەژمێربکەیت، بەبێ بەکارهێنانی ڕێساکانی ڕووبەرە پەیرەوکراوەکان.

وانەی

1

هەندێك لە دەستپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس

Building of Eculidean Geometry



بۆچی

دەتوانین شێوە ئەندازەییەكان بەكاربهێنین لە خاڵەكان و ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان بۆ ئەوەی نموونەكانی بیركاری دروستبكەین بۆ شێوە ماددەكان ئەو نموونانە بەكاردێت، بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان لە ژیاندا بەكاردەهێنرێت.

خەتی كاكێشانی لوولپێچ $M\,31$ لە كۆمەڵەی ئەندرۆمید وەك هاوڕێی خەتی كاكێشانی ئێمە وایە. هەروەك خەتە كاكێشەكان لە ئەستێرەكان و هەسارەكان پێكدێن، ئاواش شێوە ئەندازەییەكان لە خاڵەكان پێكدێن.

ئامانجەكان

- خاڵ و ڕاستەهێڵ و ڕووتەخت جیا دەكاتەوە.
- پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك و گۆشە خاڵەكانی ڕێكی یەكتر لە یەك ئاست دەناسێت.
- لەو بەڵگەنەویستانە دەكۆڵێتەوە كە پەیوەندیان بە خاڵەكان و ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكانەوە هەیە.

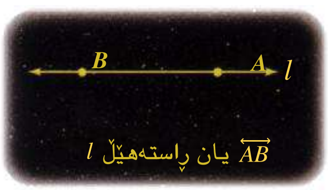
پێكهاتە بنەڕەتییەكانی ئەندازە — Basic elements in geometry

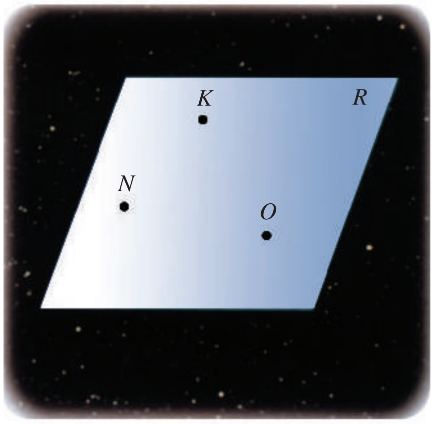
شێوە ئەندازە بنەڕەتییەكان بریتیین لە **خاڵ** و **ڕاستەهێڵ** و **ڕووتەخت**. هەر ئەوانەش هەموو شێوەكان و تەنەئەندازەییەكان پێكدێنن. زاناكانی بیركاری گەیشتنە ڕێگایەكی داخراو لە پێناسەكردنی ئەم دانانە، ئەوەی لە سەری ڕێككەوتن و پەسەندیانكرد كە ئەو دانانە وەربگرن بێ ئەوەی پێناسەیان بكەن، لەگەڵ ئەوەی ئەو دانانە پێناسە نەكراون، دەتوانین لێیان بدوێین. پێشەكی پێویستە بزانین كە شێوەكان و تەنەئەندازییەكان لە جیهانی هەستپێكراوی ئێمە دانین، خاڵ پێوانەی نییە، ڕاستەهێڵ پانی نییە ئەم پەرتووكە نواندنی شێوەكان وتەنە ئەندازەییەكانی تێدایە. بەڵام نواندن شتێكە و شێوە و تەنی ئەندازەیی شتێكی ترە. شێوەكان و تەنە ئەندازییەكان تیۆریانە تەنها لە هۆشمان هەیە.

خاڵ كاتێ سەیری ئاسمان دەكەیت لە شەوێكی ساماڵدا هەندێك ئەستێرەی دووری درەوشاوە دەبینیت وا دەردەكەون كە خاڵن. خاڵ بەو شوێنەوارە دەنوێنرێت كە نوكی قەڵەمەكە بەجێی دێڵێ لەسەر كاغەزەكە.پێوەری ئەم نواندنە گەورە دەبێت وبچووك دەبێتەوە، لە كاتێك ئەو شوێنەوارەی كە خاڵەكە دەینوێنێ پێوانەی نییە. زۆربەی كات پیتەكانی $A, B, C \ldots$ بەكاردێت بۆ ناولێنانی خاڵەكان



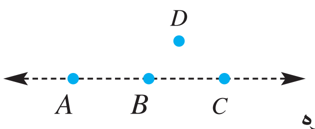
ڕاستەهێڵ ڕاستەهێڵی ئەندازەیی پانی نییە. هێڵێكە خواروخێچی تێدانییە، لە هەردوو سەرەوە بۆ ناكۆتا درێژدەبێتەوە بۆ ناولێنانی ڕاستەهێڵ ناوی دوو خاڵی جیاواز بەكاربهێنە كە پێیاندا بڕوات لەگەڵ دانانی نیشانەی تیر لەسەر هەردوو سەرەكانی و ئەم ڕاستەهێڵە بەم شێوەیە دەنووسرێت $\overleftrightarrow{AB}$ كە ناوی ئەو ڕاستە هێڵەیە بە دوو خاڵی A ، B دەڕوات و دەتوانیت ناو لە ڕاستەهێڵەكە بنێیت بەیەك پیت.





ڕووتەخت ڕوویەکی تەختی درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتایی لە هەموو لایەکانەوە. دەتوانیت بەشێک لە ڕووتەختێک بنوێنیت بەهەر ڕوویەک کە بەرز و نزمی تیدانەبێت. وەک ڕوویەکی مێز یان بەرگی پەرتووک. ئەو ڕوو تەختە لە وێنەی بەرامبەر دایە بەشێک لە ڕووتەختێک دەنوێنێ.

بۆ ناولێنانی ڕووتەخت ناوی سێ خاڵ بنێ کە ڕووتەختەکە پێیاندا بڕوات: دەڵێین ڕووتەختی MNO، بەمەرجێک ئەو سێ خاڵە نەکەونە سەر ڕاستەهێڵێک و دەتوانیت یەک پیت بەکاربهێنین بۆ ناو لێنانی ڕووتەختەکە.دەڵێین ڕوتەختی R.



خاڵەکانی A،B،C لە ڕێکی یەکترن

خاڵەکانی A،B،Dلە ڕێکی یەکترنین

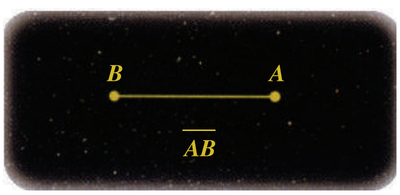
بە چەند خاڵێکی جیاواز دەڵێین لە ڕێکیەکتر ئەگەر بکەونە سەر **یەک** ڕاستەهێڵ. ئەم وێنەی بەرامبەر ڕووی دەکاتەوە کە خاڵەکانی A و B و C لە ڕێکی یەکترن. دەڵێین ژمارەیەک لە خاڵ جیاوازەکان لەیەک ئاست دەبن ئەگەر بکەونە ناویەک ڕووتەخت. تێبینی ئەوە بکە کە دوو خاڵ هەمیشە لە ڕێکی یەکترن و سێ خاڵ هەمیشە لەیەک ئاستدان.

پێناسەی شێوە ئەندازەییەکان بەپێی پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازە
Defining Figures in Terms of the Basics

دەتوانیت پێناسەی ژمارەیەک لە شێوە ئەندازییەکان بکەیت بە دەستپێکردن لە پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازەوە. لەمەودوا پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ و تیشک و گۆشە دەکەین بەم شێوەی خوارەوە.

پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ Segment Definition

پارچە ڕاستەهێڵ **Segment** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ لە خاڵێکەوە دەستپێدەکات و لە خاڵێکی ترەوە کۆتایی دێت **Endpoints**. دوو سەرەکانی پارچە ڕاستەهێڵەکە ئەو دوو خاڵە دیاریان دەکات.



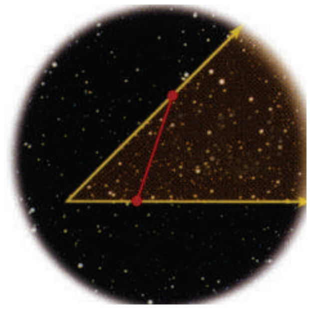
بۆ ناو لێنانی پارچە ڕاستەهێڵ ناوی دوو سەرەکەی بەکاربهێنە، خەتێک لەسەر هەردوو ناوەکە دابنێ. پارچە ڕاستەهێڵی $\overline{AB}$ بریتیە لەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە A و B دوو لایەکەی دەنوێنن.

پێناسەی تیشک Ray Definition

تیشک **Ray** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ کە لە خاڵێکەوە دەست پێدەکات و درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتا بە یەک ئاراستە. سەری تیشکەکە بریتیە لە خاڵی دەستپێکردن **Endpoints**.



بۆ ناولێنانی تیشک ناوی خاڵی سەری تیشککە و ناوی خاڵێکی تر بەکاربهێنە. نوسینی تیشکی YX ئەوە دەگەیەنێت سەری تیشککە (X)وە بەخاڵی Yدا دەڕوات.

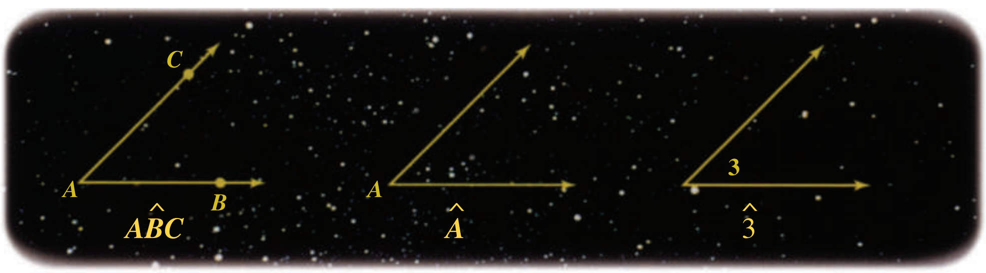


Angle Definition   پێناسەی گۆشە

گۆشە **Angle** ئەو شێوە ئەندازەییە لە ئەنجامی بەیەك گەیشتنی دوو تیشك پەیدادەبێت کە هەمان خاڵی دەستپێکردنیان هەیە. خاڵی دەستپێکردنەکە سەری گۆشەکەیە **Vertex** و دوو تیشکەکە دوو لای گۆشەکەیە **Sides** .

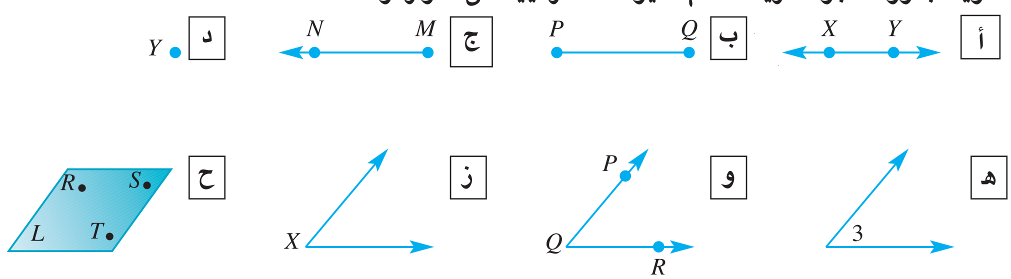
گۆشە ئەو ڕووتەختەی کە تێیدایە دەکات بە دوو بەشەوە دوو لاکانی گۆشەکە جیایان دەکاتەوە، ئەو دوو بەشە بریتین لە **ناوە گۆشە Interior** و **دەرەگۆشە Exterior**. ئەگەر خاڵێکی سەر یەکێك لەو دوو تیشکی گۆشە بگەیەنیت بەخاڵێکی تری سەر تیشکەکەی تر، ئەو پارچە ڕاستە هێڵەی ئەو دوو خاڵە دەگەیەنیت دەکەوێتە ناو گۆشەکەوە

بۆ ناولێنانی هەر گۆشەیەك دەتوانرێت یەكێك لەم سێ ڕێگایانەی خوارەوە بەکاربهێنرێت ڕێگای یەکەم دانانی پیتێك وەك D بۆ سەری گۆشەکە و دەخوێنرێتەوە بە گۆشەی D و بەشێوەی $\hat{D}$ دەنووسرێت. ڕێگای دووەم بۆ ووردەکاری زیاتر، سێ پیت بەکاردەهێنرێت یەکێکیان بۆ سەری گۆشە و دووانەکەی تر هەریەکیان دەکەوێتە سەر لایەکی گۆشەکە،وەك گۆشەی ABC کە دەنوسرێت بە شێوەی $B\,A\,C$ یان گۆشەی $C\,A\,B$ دەنوسرێت بە شێوەی $C\,A\,B$ ڕێگای سێیەم بە دانانی ڕەنووسێك لەسەر گۆشەکە وەك گۆشەی 3 دەنووسرێت $\hat{3}$.



نموونە

1 ناوێك بنووسە بۆ هەریەك لەم شێوە ئەندازەییانەی خوارەوە.



شیکار

أ راستەهێڵی XY یان راستەهێڵی YX

ب $\overline{PQ}$ یان $\overline{QP}$ یان پارچە ڕاستەهێڵی PQ

ج تیشکی MN یان $\overrightarrow{MN}$ د خاڵی Y هـ $\hat{3}$ یان گۆشەی 3

و $P\hat{Q}R$ یان $R\hat{Q}P$ یان گۆشەی RQP ز $\hat{X}$ یان گۆشەی X

ح ڕووتەختی TSR یان ڕووتەختی RTSیان ڕووتەختی STRیان ڕووتەختی SRT یان ڕووتەختی RST یان ڕووتەختی TSRیان ڕووتەختی L .

Intersection of Lines and Planes یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان

دوو شێوەی ئەندازەیی یان دوو تەنی ئەندازەیی یان شێوە ئەندازەییەك و تەنێکی ئەندازەیی **یەکتری دەبڕن** کاتێك لە خاڵێك یان زیاتر هاوبەشبن. لەم بارەدا بە کۆمەڵەی خاڵە هاوبەشەکان دەوترێت یەکتربڕینی دوو شێوەکە یان دوو تەنەکە، یان شێوە و تەنەکە.

لەو چالاکیانەی کە لەوانەکەدایە، چەند ژمارەیەك لە بنەما بنەڕەتییەکان یان بەڵگەنەویستەکان لە ئەندازەدا فێردەبیت. ئەو بنەمایانە یەکتربڕینی شێوە ئەندازەییەکان و تەنەئەندازەکان دەگرێتەوە. ئەم بەڵگەنەویستانە ڕستەی ڕاستی شتەکانمان بۆ دڵنیادەکەن بەبێ سەلماندن.

چالاکی

دۆزینەوەی هەندێك بەڵگەنەویست لە بارەی توێژینەوەی نموونەیەك

Disconering Geometry Ideas in model

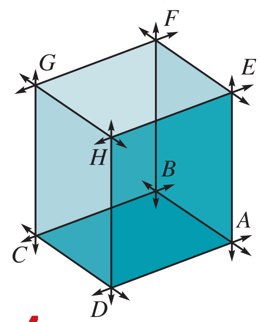
دەتوانیت بڕوانیتە وێنەی بەرامبەرت ئەمە نموونەیەکە بۆ ئەو شتانەی لە ژیانی ڕۆژانەمان دایە. وەك سندوق یان ژوور.هەر ڕستەیەك لەم ڕستانەی خوارەوە تەواوبکە بۆ ئەوەی بەڵگەنەویستەکەت دەستکەوێت.

1. سەرنجی نموونەکە بدە، دیاریبکە چۆن ڕاستەهێڵەکان یەکتری دەبڕن. یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ لە چی پێکدێت؟

بەڵگەنەویست

دوو ڕاستەهێڵی لەیەك ــــــ؟ــــــ یەکتردەبڕن.

✔ خاڵی چاودێری



ژمارەی ئەو ڕاستەهێڵانە چەندن کە لە هەر سەرێك لە سەرەکانی شێوەکە یەکتر دەبڕن؟ ئایا لەو بڕوایەدای کە ژمارەیەکی زیاتر هەیە بۆ ئەو ڕاستەهێڵانەی کە لە خاڵێکدا یەکتری دەبڕن. وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە بەبەکارهێنانی وێنەکە.

2. بەسەرەنجدانت لە نموونەکە جیایبکەرەوە، چۆن ڕووتەختەکان یەکتری دەبڕن یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت لە چی پێکدێت.

بەڵگەنەویست

دوو ڕووتەخت لەیەك ــــــ؟ــــــ یەکتری دەبڕن.

✔ خاڵی چاودێری

لە نموونەکە ژمارەی ئەو ڕووتەختانە چەندن کە لە هەر ڕاستەهێڵێکدا یەکتریان بڕیوە؟ ئایا لەو ژمارەیە زۆرتر هەیە ؟

3. سەرنجی دوو خاڵی A و B بدە. چەند ڕاستەهێڵ بەهەردوو خاڵەکەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕاستەهێڵێکی تر بکەیتەوە کە بەودوو خاڵەدا بڕوات.

بەڵگەنەویست

تەنها یەك ــــــ؟ــــــ بە دوو خاڵی جیاوازدا دەڕوات؟

ئەو ڕاستە هێڵەی بە دوو خاڵی A ، B دەڕوات هێما دەکرێ بە هێمای $\overleftrightarrow{AB}$

✔ خاڵی چاودێری

$\longleftrightarrow$

4. سەیری خاڵەکانی A و B و C بکە، ئایا لەڕێکی یەکترن؟ چەند ڕووتەخت بەهەرسێ خاڵەکەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕووتەختێکی تر بکەیتەوە بەو سێ خاڵەدا بڕوات؟

بەڵگەنەویست

تەنها یەك ــــــــــ بەسێ خاڵدا دەڕوات کەلەڕێکی یەکترنەبن. ئەو ڕووتەختەی بەخاڵەکانی A و B و C دا دەڕوات بەڕووتەختی ABC دەناسرێت.

✔ خاڵی چاودێری

ڕووتەختێك لە ڕووتەختەكانی نموونەی پێشوو هەڵبژێرە و دوو خاڵ لە خاڵەكانی هەڵبژێرە.
ئەو ڕاستەهێڵە ناو بنێ كە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات.ئایا ئەو ڕاستەهێڵە بەتەواوی دەكەوێتە ناو ڕووتەختەكەوە؟

بەڵگەنەویست

ئەو ڕاستەهێڵەی دوو خاڵی جیاواز لە ڕووتەختێكدا دەگەیەنێت دەكەوێتە ناو ____ ؟

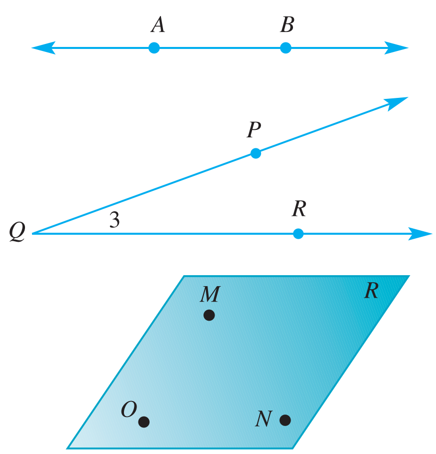
خاڵی چاودێری ✓

ڕاهێـــــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا

1. جیاوازی چیە لە نێوان شێوە ئەندازەییەكان و شتەكان لە ژیانی ڕۆژانەدا؟
2. سەرنجی پۆلەكەت بدە. ئەو شتانە دیاریبكە كە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنی.
3. بۆچی خاڵێك بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕاستەهێڵێك؟
4. بۆچی دوو خاڵ بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕووتەختێك؟
5. گرنگی ڕیزی خاڵەكان لەكاتی ناونانی تیشك چیە؟ ئەمە بە وێنە ڕوونبكەرەوە.

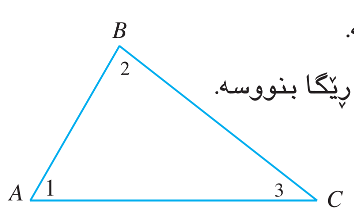
ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو



6. ئەم شێوەیەی بەرامبەرت بەكاربهێنە بۆ ناولێنانی خاڵ و ڕاستەهێڵ و پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك.
7. لە شێوەی بەرامبەرت 4 ناو بۆ گۆشەكە بنووسە.
8. لە شێوەی بەرامبەرت 3 ناو بۆ ئەم ڕووتەختە بنووسە.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

سێگۆشەكە بەكاربێنە بۆ شیكاری پرسیارەكانی 9 تا 12



9. هەموو پارچە ڕاستەهێڵەكانی سێگۆشەكە بنووسە.
10. هەموو گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بەسێ ڕێگا بنووسە.
11. دوو تیشكی هەر گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بنووسە.
12. ئەو ڕووتەختە بنووسە كە سێگۆشەكەی تێدایە.

جێبەجێکردن

ئارەزووەکان وێنەی ئەم حەوزە ماسییەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 13 تا 17 . ئایا هەریەک لە لە پێکهێنەرەکانی حەوزەکە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنێت؟

13 لایەك لە لاکانی حەوزەکە **14** دەنکە لم

15 ڕوویەك لە ڕووەکانی حەوزەکە **16** ڕووی ئاوەکە

17 گۆشەیەك لە گۆشەکانی حەوزەکە



ئایا ئەم ڕستانەی خوارەوە لە هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 18–25 ڕاستە یان هەڵەیە. هۆیەکەی دیاریبکە.

18 ڕاستەهێڵ خاڵی سەری هەیە

19 ڕووتەخت سنووری هەیە

20 ئەگەر سێ ڕاستەهێڵ لە خاڵێکدا یەکتری ببڕن ئەوا دەکەونە یەك ڕووتەختەوە

21 دەکرێت دوو ڕووتەخت لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم یەکتری ببڕن بەبێ ئەوەی خۆیان یەکتری ببڕن.

22 دەکرێت سێ ڕووتەخت لەیەك خاڵدا یەکتری ببڕن.

23 کام دوو خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

24 کام سێ خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

25 کام چوار خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 26 تا 30 .

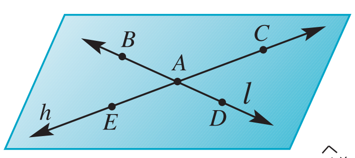
26 ناوی ڕاستەهێڵێك لە شێوەکە بنووسە، 3 ناوی تر بۆ ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە.

27 خاڵێك لە سەر ڕاستەهێڵی l ناوبنێ

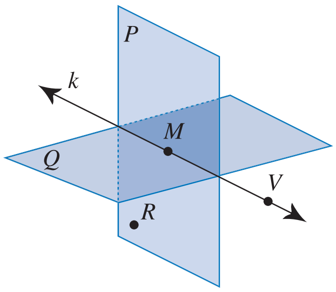
28 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ l و h ناوبنێ

29 گۆشەیەك لە شێوەکە ناوبنێ، سەری ئەو گۆشەیە و ئەو دوو تیشکەی پێکیهێناوە ناوبنێ.

30 ئایا دەتوانرێت یەکێك لە گۆشەکانی شێوەکە ناوبنرێ $\hat{A}$ هۆ وەلامەکەت دیاریبکە؟



بڕوانە ئەم شێوەی بەرامبەرت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 31 بۆ 33

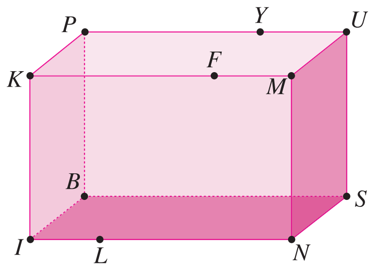


31 یەکتر بڕینی هەردوو ڕووتەختی P و Q ناوبنێ.

32 ڕاستەهێڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی Q

33 خاڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی P

ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 34 بۆ 37



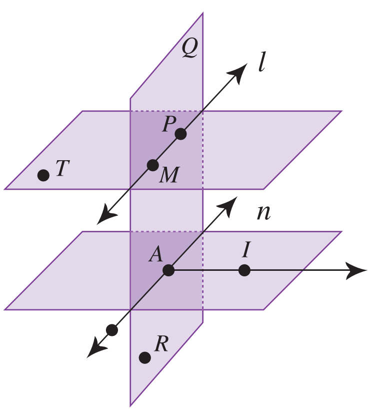
34 خاڵێك ناوبنێ لە سەر $\overline{KM}$

35 یەکتربڕینی $\overline{MU}$ ، $\overline{MN}$ ناوبنێ.

36 سێ خاڵ لە ڕێکی یەکتری بن ناوبنێ.

37 دوو پارچە ڕاستەهێڵ کە لەیەك ئاست بن ناوبنێ

بڕوانە شێوەی بەرامبەر بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 38 بۆ 40



38 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ n و AI ناوبنێ

39 یەکتربڕینی ڕووتەختی Q و ڕووتەختی MPT ناوبنێ.

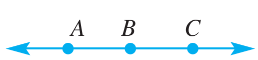
40 سێ خاڵ ناوبنێ کە لە یەك ئاست بن.

ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵە جیاوازانەی کە دەتوانرێ ناوبنرێن لە هەریەك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ هەریەکیان ناوبنێ.

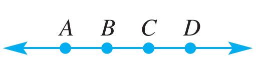
41



42



43

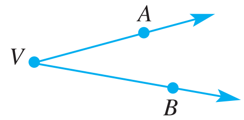


جەبر

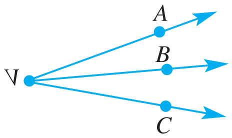
44 ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەتوانرێ ناویان لێبنرێت بە زانینی ژمارەیەکی دیاری کراو n لە خاڵەکان کە دەکەونە سە ر یەك ڕاستەهێڵ. ڕوونیبکەوە چۆن ڕێساکەت دۆزییەوە.

ژمارەی ئەو گۆشە تیژانەی کە دەتوانیت ناویان لیّ بنێیت لە هەریەکێك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ناوەکانیان دیاریبکە.

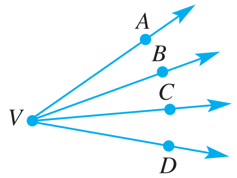
45



46

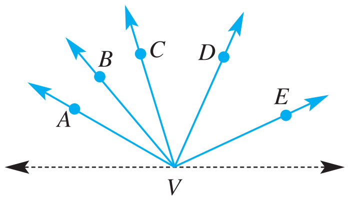


47



جەبر

48 ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو گۆشانەی لە 180 بچووکترن کە دەتوانیت ناویان بهێنیت بە زانینی ژمارەیەکی دیاریکراو، n لەو تیشکانەی کە هەمان خاڵی دەست پێکردنیان هەیە روونیبکەرەوە چۆن دۆزیتەوە. وای دابنێ کە هەموو تیشکەکان بکەونە دیوێکی ڕاستەهێڵەکەوە.هەروەك لەم شێوەیەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە



ڕوانین بۆ دواوە

هاوکێشەیەك بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە بۆ ڕاستە هێڵێك.

49 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی $y=\frac{3}{4}x-1$ و بەخاڵی $(-2, 5)$دابڕوات.

50 ئەستون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x-3y=1$ و بەخاڵی $(-4, 2)$دابڕوات.

جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشە دووجایانە هەژماربکە. و ژمارەی ڕەگەکانی دیاریبکە. پاشان ڕەگەکان هەژماربکە

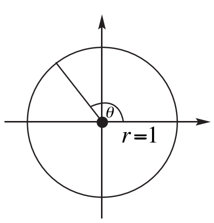
51 $x^2-6x+12=0$ **52** $4x^2-4x+1=0$ **53** $x^2-6x+8=0$

ژمارەی ریزکردنەکان یان ژمارەی گونجێنەکان هەژماربکە.

54 ${}_8P_3$ **55** ${}_9P_7$ **56** $\binom{10}{3}$ **57** $\binom{8}{4}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

2π بریتیە لە چێوەی بازنەیەك کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 1 یەکەیە لە ڕووتەختی پۆتاندا. دەتوانی درێژی ئەو کەوانەی کە چەقە گۆشەکەی θ دیاری کردووە بدۆزیتەوە بەم یاسایە. $l=\frac{\theta}{360}\times 2\pi$ ، و درێژی کەوانەکە بە l هێما دەکرێت.



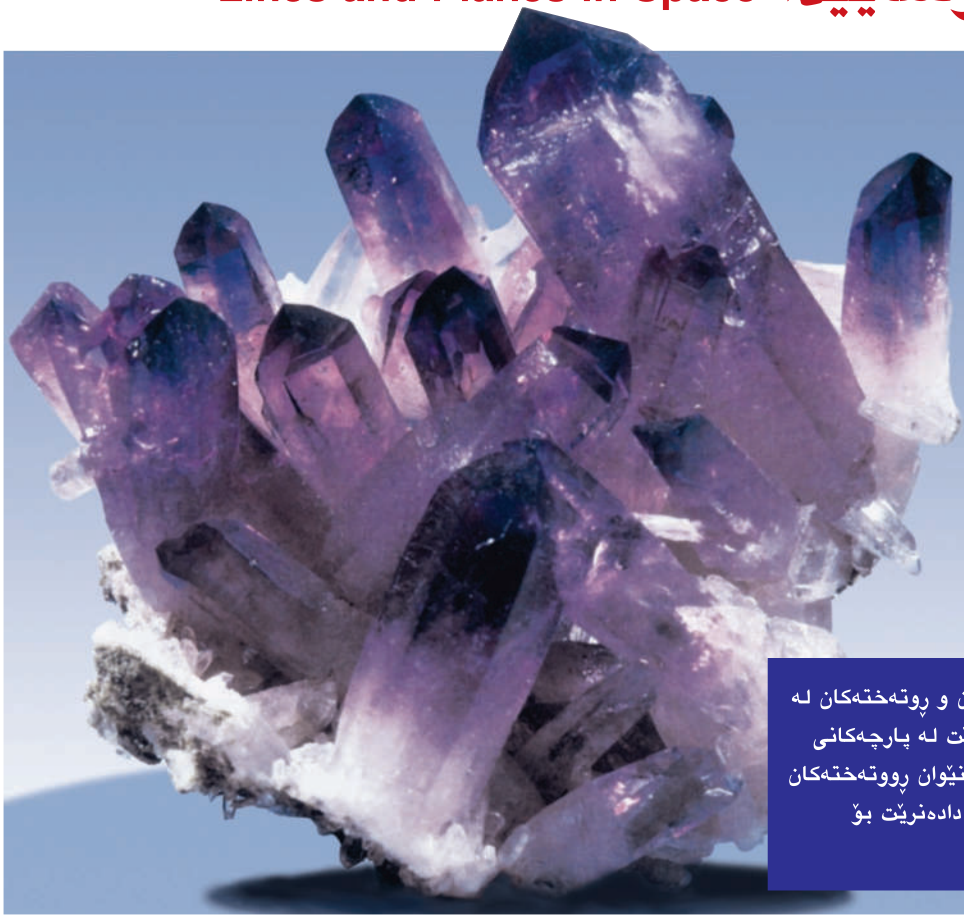
درێژی کەوانەکە هەژماربکە کە هەریەك لەم گۆشانە دیاریدەکات.

58 $\theta=180^\circ$ **59** $\theta=90^\circ$

60 $\theta=360^\circ$ **61** $\theta=45^\circ$

وانەی 2

ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا Lines and Planes in Space



ئامانجەکان

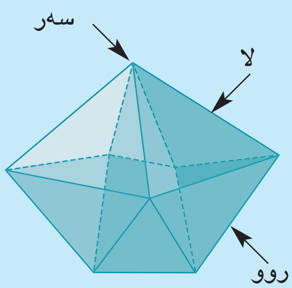
- پەیوەندییەکانی نێوان خاڵەکان و ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا جیادەکاتەوە.
- گۆشەی دوو ڕووتەخت جیادەکاتەوە.

بۆچی؟ تێبینی تێکهەڵکێشی ڕاستەهێڵەکان و ڕوتەختەکان لە زۆرشتدا دەکەیت هەروەک چۆن دەردەکەوێت لە پارچەکانی کریستاڵدا. هەستکردن بە پەیوەندییەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا بە پێویست دادەنرێت بۆ تێگەیشتنی زۆر لە بنیاتەکانی سروشت.

تەنە ئەندازەییەکان Figures in Space

زۆر ڕووەکان **Polyhedron** تەنێکی داخراوە لەبۆشاییدا و لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت کە هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرێ.

زۆر ڕووەکان Plolyhedron



زۆر ڕووەکان تەنێکی داخراون لە بۆشاییدا لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرن. ئەو چەند لایانە پێیان دەوترێت ڕووەکانی **Faces** تەنەکە. ئەم ڕووانە یەکتری دەبڕن لەچەند پارچە ڕاستەهێڵێك کە پێیان دەوترێت لاکانی زۆر ڕووەکە. سەرەکانی زۆر ڕووەکان بریتین لە سەرەکانی چەندلاکانی کە ڕووەکانیان **Vertices** پێکهێناوە.

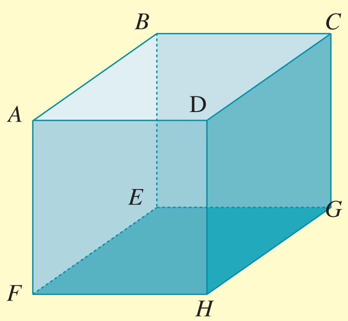
هەندێك ڕوو هەیە لەوانەی تر زۆرتر دەیان ناسی وەك خشتەك (شەشپاڵو)، شەشپاڵۆ تەنێکی بۆشایی گرە شەش ڕوو و 12 لا و 8 سەری هەیە. شەشپاڵوو کە بەسیفەتێکی گرنگ ناسراوە ئەوەش ئەوەیەکە هەموو ڕووەکانی چوارگۆشەی جووتن لەسەریەکتری و هەرسەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەکگەیشتنی سێ ڕوویەتی و پێی دەوترێت زۆر ڕووی ڕێك **Regular Polyedron**. بەشێوەیەکی گشتی بەزۆر ڕوویەك دەوترێت ڕێك **Regular** ئەگەر هەموو ڕووەکانی چەندلای جووت بن، و هەر سەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەك گەیشتنی هەمان ژمارەی ڕووەکان بێت.

ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشایی: ڕێگای هەنگاو بە هەنگاو
Lines and Planes in Space: A Step-by-Step Procedure

لەم چالاکییانەی خوارەوە لەمەودوا چەند بۆچونێك دەدۆزیتەوە لە بارەی پەیوەندیەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا و هەڵدەستێت بە بڕەوپێدانیان.

چالاکی 1

ڕاستەهێڵ و ڕووتەختە تەریبەکان لەبۆشاییدا
Plane and Parallel Lines in Space



بەشی یەکەم

1. شەشپاڵویەك بكێشە و سەرەکانی ناوبنێ هەروەك ڕوونکراوەتەوە لە شێوەی بەرامبەردا. ناوی لاکانی ستونی شەشپاڵووەکە بنووسە. ئایا وا دەردەکەوێت کە هەردوو ڕاستەهێڵی AE و CG، لەیەك ڕووتەختدابن؟وا دەردەکەون کە تەریبن بەیەکتری؟ ئایا لەو باوەڕەدایت کە ئەم دووڕاستەهێڵە بەیەکبگەن کاتێك درێژبکرێنەوە تاناکۆتا؟

2. کام لە لایەکانی شەشپاڵووەکە تەریبن بەیەکتری؟ — خاڵی چاودێری ✓

3. ئایا لێرەدا لا هەیە تەریب نەبێت لەگەڵ ئەوەی بەیەکتری ناگەن ئەگەر درێژیش بکرێنەوە بۆ ناکوتا؟ هۆیەکەی دیاریبکە. بەم ڕاستەهێڵانەی کە ئەم لایەنە دەنوێنن پێیان دەوترێت تەکولۆ Skew چوار جووت لەو ڕاستەهێڵە تەکولۆیانە دیاربکە لەوێنەکەدا

بەشی دووەم

1. ژمارەی ڕووەکانی شەشپالووەکە چەندن؟ کام لەم ڕووانە تەریبن بەیەکتری؟

2. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسەبۆ ڕووتەختە تەریبەکان.بەتەواوکردنی ئەم ڕستەیەی خوارەوە. — خاڵی چاودێری ✓

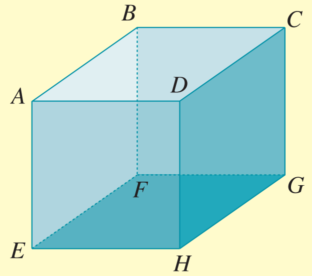
پێناسەی ڕووتەختە تەریبەکان Parallel Planes

دوو ڕووتەخت تەریب دەبن تەنها ئەگەر ____؟____.

تێبینی: دوو شێوەی ئەندازەیی تەریب دەبن، تەنها ئەگەر بکەونە دوو ڕووتەختی تەریب.

چالاکی 2

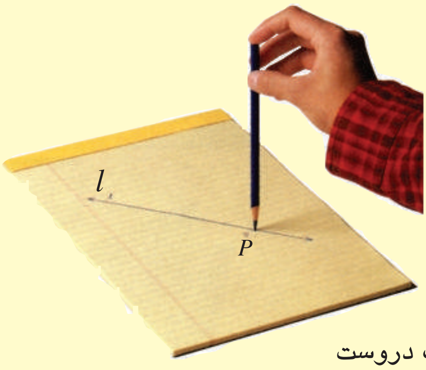
پارچە ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان Segments and Plane



بەشی یەکەم

1. هەر ڕاستەهێڵێك لایەك لە لاکانی شەشپالوی بەرامبەر دەنوێنێت ئەستون دەبێت لە سەر دوو ڕووی جیاوازی خشتەکەکە. لیستێك دروست بکە بەو ڕاستەهێڵانەی لاکانی خشتەکەکەیان پێکهێناوە لەگەڵ دیاریکردنی دوو ڕووی ئەستون لەگەڵ هەریەك لەو ڕاستەهێڵانە.

2. که دەڵێین ڕاستەهێڵێك ئەستونە لەگەڵ ڕووتەختێك ئەمە مانای چی دەبەخشێت بۆتۆ؟ ڕاستە هێڵی l لەسەر کاغەزێك بکێشە و خاڵێکی وەك P ی لەسەر دیاربکە. قەڵەمەکە لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە بەستوونی ڕاگرە و سەرەکەی لە خاڵی P بێت. ئایا قەڵەمەکە لەسەر ڕاستەهێڵی l ئەستوون دەبێت.



3. ئایا دەتوانیت قەڵەمەکە لاربکەیتەوە بەمەرجێك هەر ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی l بەبێ ئەوەی ئەستوون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە؟ وێنەیەك دروست بکە، ئەم وەڵامەت ڕوونبکاتەوە.

4. وێنەی ڕاستەهێڵێکی تازە m بکێشە کە بە خاڵی P دا بڕوات. سەری قەڵەمەکە لەسەر خاڵی P دابنێ، بەمەرجێك قەڵەمەکە ئەستوون بێت لەگەڵ هەریەك لە دوو ڕاستەهێڵی l و m پەیوەندی نێوان قەڵەمەکەو ڕووتەختی کاغەزەکە چ جۆرە پەیوەندیەك دەبێت؟

5. ژمارەیەکی تر ڕاستەهێڵ بکێشە کە بەخاڵی P دابڕۆن. ئەگەر قەڵەمەکە ئەستون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە، ئایا ئەستون دەبێت لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵانەی کەلەخاڵی P کێشراون.

6. پێناسەی تایبەتی خۆت بنوسە بۆ ڕاستەهێڵی ئەستون لەسەر ڕوووتەخت بە تەواوکردنی ئەم ڕستەیەیی خوارەوە.

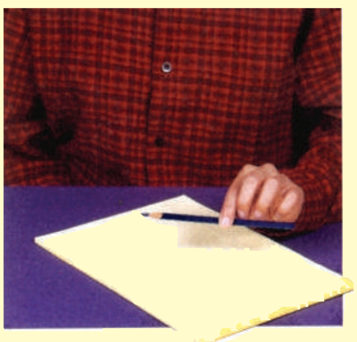
خاڵی چاودێری ✔

پێناسە

ڕاستەهێڵێك ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختێك لە خاڵێك لە خاڵەکانیدا ئەگەرو تەنها ئەگەر ئەستون بێت لەسەر هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی دەکەونەوە ڕووتەختەکەوە و دەڕۆن بە ___؟___

بەشی دووەم

ڕاستەهێڵ تەریب دەبێت بەڕووتەختێك ئەگەر نەیبڕێت.



1. هەموو لایەك لە لاکانی شەشپاڵوویەك تەریبە بە دوو ڕوو لە ڕووەکانی شەشپاڵووەکە (سەیری پرسیاری 1 لە بەشی یەکەم بکە) لیستێك دروستبکە بەلاکانی شەشپاڵووەکە، دوو ڕووی تەریبی بەرامبەری هەر لایەك دیاربیکە.

2. ڕاستەهێڵی l لە سەر کاغەزێك بکێشە. قەڵەمەکەت بگرە بەمەرجێك بەرزتربێت لە ڕووتەختی کاغەزەکە و تەریب بێت بەڕاستەهێڵی l. ئایا قەڵەمەکە وا دیاردەبێت کە تەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە؟

3. قەڵەمەکە بسوڕێنە بەمەرجێك هەرتەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە و بێ ئەوەی تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی l . ئایا لەو بڕوایە دایت کە لە توانات دا دەبێت ڕاستەهێڵێکی تر بکێشێت لە کاغەزەکەدا بەمەرجێك تەریب بێت بە قەڵەمەکە لەو بارەی تازەیدا؟

4. سیفەتێك لە سیفەتەکانی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕووتەختێك بنووسە بە تەواوکردنی ئەم ڕاستیەی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✔

پێناسە

ڕاستەهێڵێك تەریب دەبێت بەڕووتەختێك نەکەوێتە ناویەوە ئەگەرو تەنها ئەگەر تەریب بێت بە ___؟___ بکەوێتە ناو ئەو ڕووتەختە.

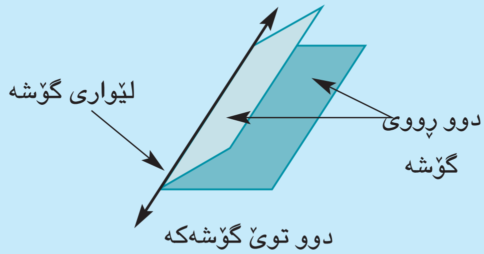
Angles Formed by Planes — گۆشەی دوو ڕووتەخت

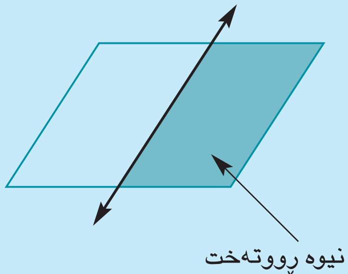
هەر ڕاستەهێڵێك بکەوێتە ڕووتەختێکەوە دابەشی دەکات بە دوو بەشەوە هەربەشێکیان پێی دەوترێت نیوە ڕووتەخت و بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت لێواری نیوە ڕووتەختەکە.

Dihedral Angle — دوو تویٚ گۆشە

دوو تویٚ گۆشە **Dihedral Angle** بریتییە لەو شێوە بۆشاییەی کە لە دوو نیوە ڕووتەخت پێکدێت کە هەمان لێواریان هەیە.

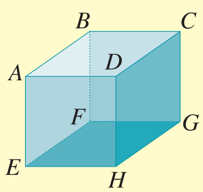
هەریەك لەدوو نیوە ڕووتەختەکە پێی دەوترێت ڕووی **Face** گۆشەکە و بەلێوارە هاوبەشەکەی نێوانیان دەوترێت لێواری گۆشەکە **Edge of the Angle**.



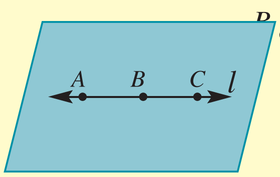


چالاکی 3

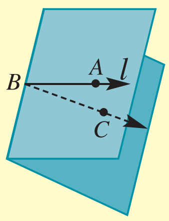
Measure of a Dihedral Angle — پێوانی دوو تویٚ گۆشە



1. هەندێك ڕووەکانی شەشپاڵوو دوو تویٚ گۆشەی وەستاوپێك دێنن (واتە ئەو دوو ڕوووەی ئەستوونن لە سەر یەکتری). هەر ڕوویەك لە ڕووەکانی شەشپاڵووەکە ئەستون دەبێت لەگەڵ ژمارەیەك لە ڕووەکانی تر. ئەو ژمارەیە چەند دەبێت؟



2. ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی l لەسەر کاغەزێك بکێشە و لەسەر ئەو ڕاستەهێڵە سێ خاڵی A و B و C دیاریبکە بەمەرجێك خاڵی B بکەوێتە نێوان هەردوو خاڵەکەی تر. کاغەزەکە بنوشتێنەوە بە مەرجێك هەردوو نیوەی ڕاستەهێڵی l کە سنووردراوە بەخاڵی B جووتبن، پەیوەندی چییە لەنێوان ڕاستەهێڵ نوشتێنراو و ڕاستەهێڵی l ؟



3. کاغەزەکە لەسەرخۆ بکەوە بۆ ئەوەی دوو تویٚ گۆشەیەکت دەست بکەوێت پێوانەی گۆشەی ABCدادەنرێت بە پێوانەی دوو تویٚ گۆشەکە.

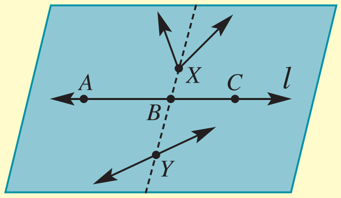
4. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسە بۆ پێوانەی دوو تویٚ گۆشە بە تەواوکردنی ئەم ڕستەیەی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✓

Measure of a Dihedral Angle — پێوانەی دوو تویٚ گۆشە

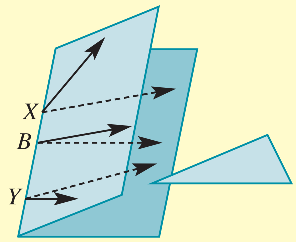
پێوانەی گۆشەیەکە سەرەکەی لەسەر لێواری دووتویٚ گۆشەکە بێت و دوو لاکانی ______؟ لەگەڵ ئەو لێوارە و هەریەکێکیان بکەونە ڕوویەك لە دوو ڕووی دوو تویٚ گۆشەکەوە.

5. کاغەزەکە بکەوە و رایبخە. ڕاستەهێڵێکی نوشتێنراوە بکێشە و دوو خاڵی X و Y لەسەر دیاربکە. لە و دوو خاڵەوە دوو تیشك بکێشە کە هەریەکیان بکەونە لایەکی ڕاستەهێڵە نوشتاوەکەوە هەروەك لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە



خاڵی چاودێری ✔

6. کاغەزەکە جارێکی تر بنوشتینەوە. لە دوایدا پارچە کاغەزەکە بەوردی ببڕە کە بتوانیت بیخەیتە ناو هەموو گۆشە جیاوازەکان کە دروست بووە لە ئەنجامی تیشکە کێشراوەکان، شێوەکانی پارچە کاغەزەکانی دەستت کەوتووە بەراوردبکە. ئایا پێوانەی ئەو گۆشانەی دروستبووە لەئەنجامی کێشانی تیشکەکان یەکسانن بە پێوانەی ABC یان جیاوازە لێی؟



7. ئەو سێ گۆشەیەی لە پرسیاری 6 دەستتکەوتووە پێوانەبکە و پێوانەکانیان بەراوردبکە، کام گۆشەیان بچووکترە ؟ کام گۆشەیان گەورەترە؟ ئەو ئەنجامانە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە بۆچی دوو توێ گۆشە دەپێورێ بە پێوانی ئەو گۆشەیەی دوو لاکەی ئەستوونن لەسەر لێواری دوو گۆشەکە.

تێبینی : 1. پێوانەی دوو توێ گۆشە یەکسانە بە پێوانەی ڕووە گۆشەکەی

2. ڕووە گۆشە بۆ دوو توێ گۆشە ئەو گۆشەیە کەدوو لایەکانی ئەستوونن لەگەڵ لێواری دوو توێ گۆشەکەو هەریەکێکیان دەکەونە ڕوویەك لە دوو ڕووەکەیەوە.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 لە بۆشاییدا ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن لەسەر ڕاستەهێڵی سێیەم. ئایا ئەو دوو ڕاستەهێڵە بەیەکتر تەریب دەبن؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

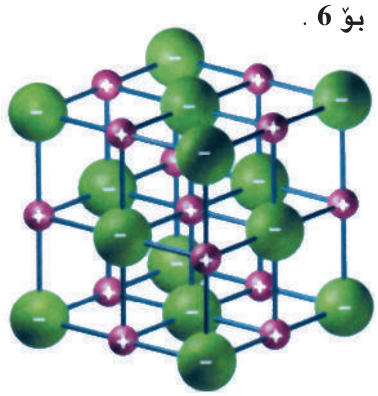
2 ئەگەر ڕاستەهێڵێك بکەوێتە ڕووتەختێك و ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵێکی تر کە نەکەوێتە ڕووتەختەکەوە، ئایا ڕاستەهێڵی دووەم ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختەکە؟ هۆی وەڵامەکەت بنووسە.

3 ئەگەر ڕاستەهێڵێك ئەستوون بێت لە سەر دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕی ناو ڕووتەختێکەوە ئایا ئەستون دەبێت لە سەر ڕووتەختەکەیان؟ هۆی وەڵامەکەت دیاربکە

جێبەجێکردنەکان

کیمیا

ئەو شێوەیەی بەرامبەر پێکهاتەی سێجایی نموونەی کریستاڵی کلۆریدی سۆدیۆم ڕووندەکاتەوە. خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەیبینیت ناویان لێبنێ و بەکاریان بهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 4 بۆ 6 .



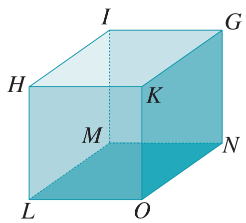
4 دوو پارچە ڕاستەهێڵی تەریب بەیەکتر دیاربکە. و هۆی تەریب بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

5 دوو ڕووتەختی تەریب بەیەکتر دیاربکە. هۆی تەریب بونەکەیان ڕوونبکەرەوە.

6 دوو ڕووتەختی ئەستوون دیاربکە، هۆی ئەستوون بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

وێنەی ئەم خشتەکەی بەرامبەرت بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 7 تا 11



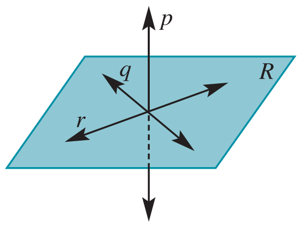
7 دوو جووت لە لاتەریبەکان دیاربکە

8 دوو جووت لە لا تەکولۆکان دیاربکە

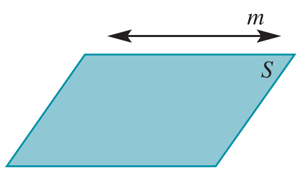
9 دوو جووت لە ڕووە تەریبەکان دیاربکە

10 دوولا دەستنیشانبکە و ئەو ڕووختەنانەی دیاریبکە کە ئەستونن لەسەر هەر یەکێکیان.

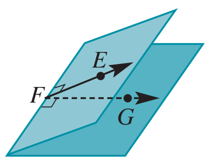
11 دوو جووت لەلاتەریبەکان دیاربکە کە ناکەونە ناو یەك ڕووەوە.



12 ڕاستەهێڵی p لە وێنەی بەرامبەر ئەستونە لەسەر ڕووتەختی R پەیوندی نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕاستەهێڵی q و هەروەها نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕاستەهێڵی r چییە؟

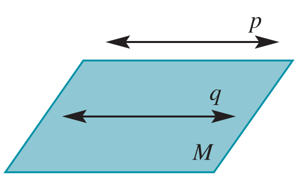


13 لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی m تەریبە بە ڕووتەختی S، پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی l و ئەو ڕاستەهێڵەی دەکەوێتە ڕووتەختی S و چییە؟

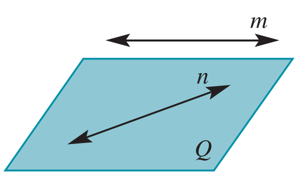


14 لە وێنەی بەرامبەردا پێوانەی دوو توێ گۆشەکە چەندە؟

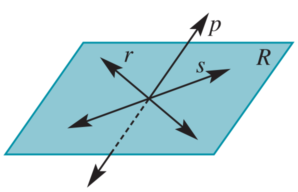
ڕاهێنان و جێبەجێکردن



15 لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی p تەریبە بەڕاستەهێڵی q پەیوەندی چییە لە نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕووتەختی M



16 لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی m تەریب نییە بە ڕاستەهیلی n. چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی m و ڕووتەختی Q ؟ ڕوونیبکەوە.



17 لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی p ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی r و ئەستوون نیە لەسەر ڕاستەهێڵی s چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕووتەختی R ؟

ئایا ئەم ڕستانە لە هەر پرسیارێك لە پرسیارەكانی 18–22 ڕاستن یا هەڵەن؟ بۆچونەكانت بە وێنە ڕوونبكەرەوە.

18 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ تەریب بن بە ڕاستەهێڵی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

19 ئەگەر دوو ڕووتەخت تەریب بن بە ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

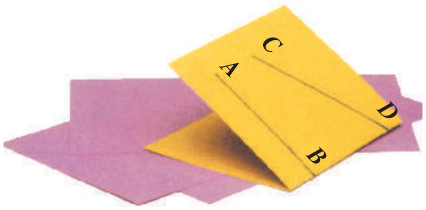
20 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

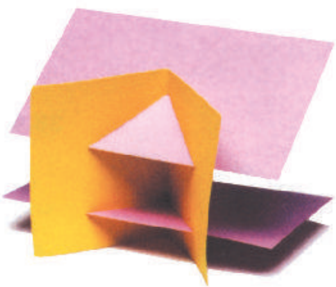
21 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕاستەهێڵێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

22 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

ئەو نموونەیەی كە دروستی دەكەیت بە پێی ڕێنمایەكان لە پرسیاری 23 بەكاریبهێنە بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان لە 24 تا 26 .

23 پارچە كارتۆنێكی لاكێشەیی بنوشتینەوە، لەسەر یەكێك لە دوو بەشەكەی، دوو ڕاستەهێڵی AB و CD بكێشە بە مەرجێك AB ئەستون بێت لەسەر هێڵە نوشتاوەكە، ڕاستەهێڵی CD ئەستون نەبێت لەسەر هێڵە نوشتاوەكە پارچەیەك ببڕە بە پێی دوو ڕاستەهێڵەكە و دەستپێبكە لە هێڵی نوشتانەوەكە. ئەو دوو پارچە بڕاوەی كە دروستت كردن بخەرە ناوەوە بۆ دروست كردنی نموونەیەك.





24 لە دوو پارچە بڕاوەكە كامەیان ئەستون نییە لە سەر هێڵی نوشتێنراوە؟

25 لە دوو پارچە بڕاوەكەی خراوتە نێوانەكەوە كامەیان دەتوانرێ بەكاربهێنرێت بۆ پێوانی دوو توێ گۆشەكە؟

26 كام لە دوو توێ گۆشەكە كە سنووردراوە بە دووپارچەكانی دانراو گەورەترین پێوانەی هەیە؟



ڕوانین بۆ دواوە

پرگال و ڕاستە بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەکان لە پرسیارەکانی 27 بۆ 30 .

27 گۆشەی ABC بکێشە و لە دوایدا کۆپیەکی وەك خۆی دروستبکە.

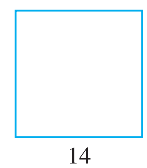
28 پارچە ڕاستەهێڵێك بکێشە و لە دوایدا تەوەرەکەی دروستبکە.

29 ڕاستەهێڵی FG و خاڵی H کە دەکەوێتە دەرەوەی بکێشە. ئەو ڕاستەهێڵە دروستبکە کە بەخاڵی H دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی FG .

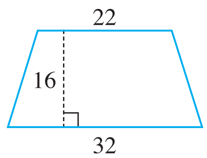
30 سێگۆشەیەك بکیشە لە دوایدا کۆپیەکی وەك خۆی دروستبکە.

ڕووبەری ئەم چەندلایانە هەژماربکە:

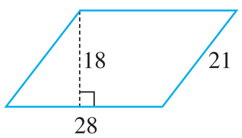
31 چوارگۆشە



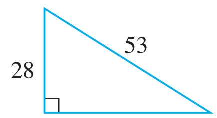
32 نیمچە لاتەریب



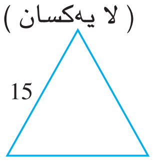
33 لاتەریب



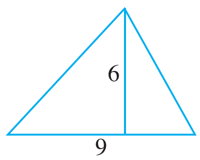
34 سیگۆشەی وەستاو



35 سیگۆشەی ڕێك (لا یەکسان)



36 سیگۆشەی جیالا

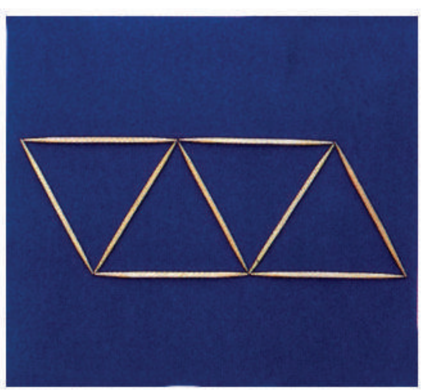


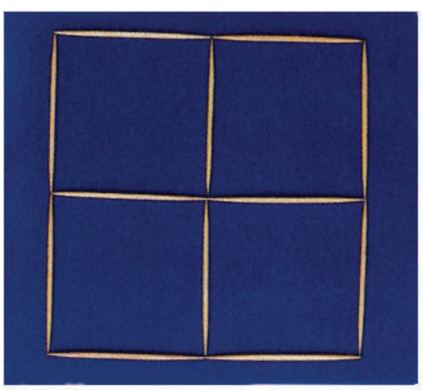
ڕوانین بۆ پێشەوە

بەرەنگاری

37 تەنها دوو دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.

38 تەنها سێ دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستدەکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.





وانەی 3

وێنە بینراوەکان Perspective Drawing

ئامانجەکان

- چەمکە بنەڕەتییەکانی وێنە بینراوەکان دەناسێت.
- ئەو چەمکانە بۆ کێشانی وێنە بینراوەکان بەکاردەهێنێت.

بۆچی؟

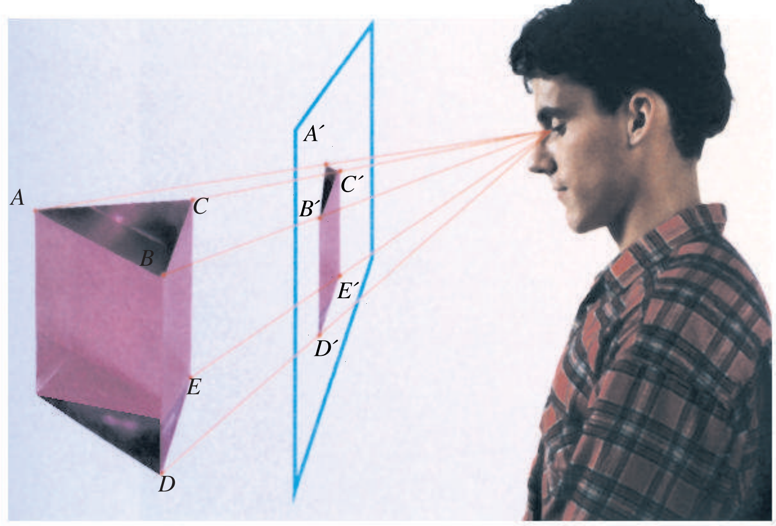
بێگومان دەزانیت کە شتە دوورەکان بچوکتر دەبینرێن لەوەی کەهەن. لە خوێندنی وێنە بینراوەکان لەمەودوا فێری دانانی ڕێساکانی کێشانی وینەکان دەبێت. بەجۆرێك شتەکان بەرێکی دەردەکەون لەپەیوەندییەکانی نێوانیان.



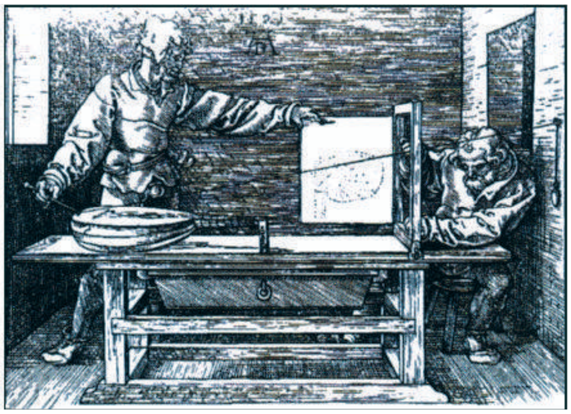
هونەرمەندە ئەوروپیەکان لە چەرخی سەرهەڵدان، لە نێوان هەردوو سەدەی چواردە و شازدەی زاینی گەڕانەوە بۆ دواوە و دۆزیانەوە چۆن هەستێکی قوڵ لە وێنەکان و تابلۆ هونەریەکان پەیدابکەن. بە دەستپێکردن لەکارە هونەریە کلاسیکیەکانی یۆنان و ڕۆمان .دەتوانیت تێبینی ئەوە بکەیت چۆن کارەکانی پێشوو لەسەردەمی ڕاپەڕین دەردەکەوێت (لە وێنەی لای ڕاست) بەبەراوردکردن لەگەڵ تابلۆکانی ئەم سەردەمە(لە وێنەکەی لای چەپ).

وێنەی بینراو: پەنجەرەیەك لەسەر ژیانی ڕۆژانە Windows to Reality

ڕێگاکانی وێنە بینراوەکانی نوێ لە سەردەستی تەلارسازی ئیتاڵی فلیب برنولیتشی دۆزرایەوە (1377- 1466م) .ئەم ڕێگایانە پشت دەبەستن بە بیرۆکەیەکی بنەڕەتی ئەویش بریتییە لەوەی کە وێنە وەك پەنجەرە وایە. ئەو هونەرمەندەی هەوڵدەدات تابلۆیەك بکێشێت یان ئەو کەسەی سەیری تابلۆیەکی هونەری ئامادەکراو دەکات، لە ڕێگای وێنەکە شتە ڕاستەقینەکان ببینێت کە تابلۆکە دەینوێنێت. کاتێك کەسێك دەڕوانێتە شتێك هێڵەکانی بینینی خەیاڵی دادەنێت، کە چاو و هەموو خاڵە جیاوازەکانی ئەو شتەی پێکهیناوە بەیەکەوە دەبەستیت. وادابنێ لێرەدا ڕووتەختێك هەیە (شووشە) بکەوێتە نێوان چاوی بینەرو ئەو شتەی سەیری دەکات. هەموو هێڵەکانی ڕوانینی ئەم ڕووتەختە بریتییە لەو خاڵانەی کە وێنەی شتەکە پێکدێنێت. وا دەردەکەوێت هەر وەکو جێکەوتەکەی بێت لەسەر ڕووتەختەکە، بۆیە دەتوانین بڵێین وێنەی شتێك بریتیە لە جێکەوتەکەی لە سەر ڕووتەختی وێنەکە **Picture Plane**



پەنجەرەی ڕووتەختی وێنەکە جێکەوتی ئەوەی دەیبینیت لە خۆدەگرێت



هونەرمەندی ئەڵمانی ئەلبەرت دو
سەردانی ئیتاڵیای کرد بۆ فێربوونی
تەکنیکی وێنە بینراوەکان لەدواییدا
وێنەی کۆمەڵێك کاری هونەری کێشا
کە هونەرمەندەکان ئەم جۆرە
تەکنیکەیان تێدا بەکارهێناوە هەروەك
لەم تابلۆیەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

خاڵی چاودێری ✔

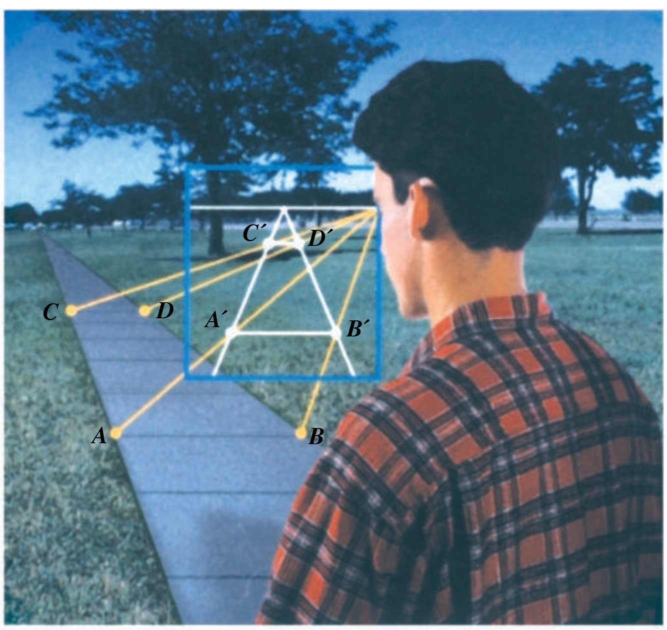
سەیری تابلۆکەی (دورر) لەسەرەوە بکە و باسیبکە چۆن هونەرمەند ئەو تەکنیکەی بەکارهێناوە بۆ ڕوونکردنەوەی جێکەوتی شتێك لەسەر ڕووتەختی وێنەکە.

هێڵە تەریبیەکان و خاڵی پوکانەوە Parallel Lines and Vanishing Points



ئایا سەرنجت داوە کە دوولای هێڵی ئاسن یان دوولای ڕێگایەکی درێژی ڕاست وا دەردەکەون کە لە دوور بەیەکتری دەگەن؟ ئەو خاڵەی کەوا دەردەکەوێت ئەو هێڵانەی تێدا بەیەك دەگەن هەمیشە لە ئاسۆدا دەبن پێی دەوترێت خاڵی پوکانەوە لە وێنە بینراوەکاندا

بۆ هەردوو پارچە ڕاستەهێڵی AB، CD هەروەك دەردەکەون لە وێنەکەی خوارەوەدا لە ڕاستیدا یەك درێژیان هەیە کاتێك بینەر ئەمانە دەخاتە سەر ڕووتەختی وێنەیەك شێوەی $\overline{AB}$ وا دەردەکەوێت درێژترە لە شێوەی $\overline{CD}$.

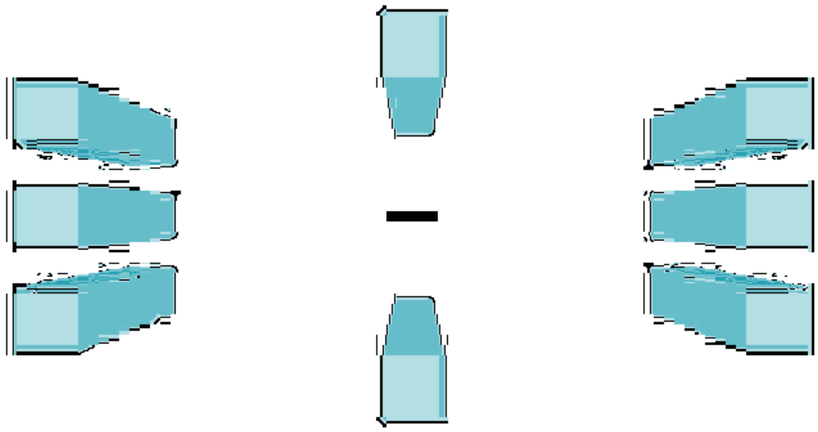


Principles of Perspective Drawing پرێساکانی وێنەی بینراوەکان

ئەم دوو پرێسایەی لەم وانەدا دێت دەبێتە بنچینە بۆ تێگەیشتنی چەمکەکانی وێنە بینراوەکان. دەتوانرێت راستی ئەم دوو پرێسایە بسەلمێنین بە خوێندنی ئەو رێگایەی کە بە هۆیەوە جێکەوتی هێڵە تەریبەکان لە سەر رووتەختی وێنەکە لە وێنە بینراوەکە دەهێنرێتەدی.

Principle 1: Sets of Parallel Lines پرێسای 1 : کۆمەڵەکانی هێڵە تەریبەکان

لەوێنەی بینراودا هەموو راستەهێڵە تەریبەکان، ئەوانەی تەریب نین بە رووتەختی وێنەکە، لە یەک خاڵدا بەیەک دەگەن کە پێی دەوترێت خاڵی پوکانەوە.



خاڵی چاودێری ✔ ئایا لەوباوەڕەدای کە ئەو خاڵەی وا دەردەکەوێت کە هەموو راستەهێڵە تەریبەکان لەویدا بەیەکدەگەن پێویستە لە وێنەکەدا بێت؟ وێنەیەک بەکاربهێنە بۆ روونکردنەوەی ئەوە.

Principle 2: Lines Parallel to the Ground پرێسای 2 : هێڵەکانی تەریب بە زەوی

لە وێنەی بینراودا، هەر راستەهێڵێک بکەوێتە رووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە رووتەختی وێنەکە، بە هێڵی ئاسۆ دەگات لە خاڵێکدا، هەر راستەهێڵێک تەریب بێت پێی لە هەمان خاڵدا بە هێڵی ئاسۆ دەگات.



خاڵی چاودێری ✔ راستەهێڵە تەریبەکانی ئەوانەی تەریبن بە رووتەختی وێنەکە لە وێنەی بینراودا، هەمیشە دەکێشرێن بە بێ خاڵی پوکانەوە. لە زۆر باردا دوورکەوتنەوە لەوە کێشە دروست دەکات. ئایا دەتوانیت باسی چەند بارێک بکەیت کە ئەم تەکنیکە وێنەیەکی راستەقینەمان ناداتێ.

خاڵی چاودێری ✔

دەتوانرێ بیرۆکەی خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا پەیڕەو بکرێت هەرچەند ئەو ڕاستەهێڵە تەریبە دەرکەوتووەکان لە وێنەکەشدا دەرنەکەون. لە ڕیزکردنی سێڵە وەرگرەکان (الصحون اللاقطة)کە لەخوارەوە ڕوونکراوەتەوە ڕاستەهێلە خەیاڵیەکان بەو خاڵانەدا دەڕۆن کە کەوتونەتە سەرو بنی سێڵەکان. ئەو ڕاستەهێڵانە لە ئاسۆدا بەیەك دەگەن.هۆیەکەی ڕوونبکەوە.



ئەندازەی تەلارسازی لە بیرۆکەی وێنە بینراوەکان سوودی زۆری بینیوە و بابەتە سەرەتاییەکانی لێ پێکهێناوە. خانووەکان و تەلارەکان جوانترین نموونەن بۆ برەوپێدانی بیرۆکەی وێنە بینراوەکان لە بەر ئەوەی زۆر ڕاستەهێڵی تەریبی تێدایە کە لە ناوخۆیاندا تەریبن بەیەکتری و تەریبن بە زەوی.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

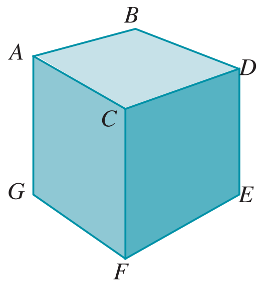
1. مانای خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا چی دەگەیێنێت؟
2. ئەو ڕاستەهێڵەی بکەوێتە ڕووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە ڕووتەختی وێنەکە، بۆچی لە ئاسۆدا کۆتایی دێت. وێنەیەك بکێشە وەلأمەکەت ڕوونبکاتەوە.



3. وێنەکانی تەلارەکان و خانووەکان بۆچی بە جوانترین نموونە دادەنرێن بۆ پەیڕەوکردنی چەمکی وێنەی بینراو؟ وێنەیەك دروستبکە بۆ ڕوونکردنەوەی وەلأمەکەت
4. ئاسۆ لە وێنەی بینراودا بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی دەنوێنرێ کە لە ئاستی چاودا بێت، ئەم گریمانە بە بۆچوونی تۆ بۆ وا دانراوە؟
5. ئەو دوو ورچەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون هەمان درێژیان هەیە.بەلأم یەکێکیان درێژتر دەردەکەوێت لەوی تریان هۆیەکەی دیاربکە؟

خاڵی چاودێری ✔

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو



6 وێنەی بەرامبەر وێنەیەكی بینراوە بۆ شەشپاڵویەك دەربارەی ئەو ڕاستەهێڵانە AB، CD، EF چی دەڵێیت؟ و بەڕاستەهێڵەكانی AC، BD، GF دەڵێن چی؟

7 ڕاستەهێڵە ستوونییەكان لە وێنەی شەشپاڵوەكەی بەرامبەردا لە خاڵی پۆكانەوە بەیەكناگەن. هۆیەكەی دیاریبكە بە بەكارهێنانی ڕێسابینراوەكان.

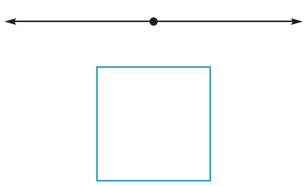
8 واداینێ وێنەی شەشپاڵوەكەی پێشو خانوویەك بنوێنی لەسەر ڕووتەختی زەوی ئەو ڕاستەهێڵانەی كە لێوارە ناستوونیەكانی خانوەكە دەنوێنن لە كوێ بەیەكدەگەن.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

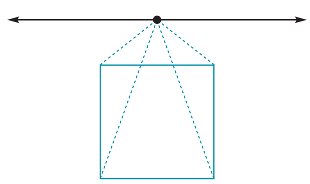
ئەم پرسیارانەی لەخوارەوە هاتوون ئەو هەنگاوانەی پێویستە بەكاربێت بۆ تەواوكردنی نموونە جۆرەوجۆرەكان لەوێنەی بینراو ڕووندەكاتەوە.

9 ئەو وێنە بینراوەی كە یەك خاڵی پوكانەوەی هەبێت پێی دەوترێت وێنەیەك كە یەك پوكانەوەی هەیە.

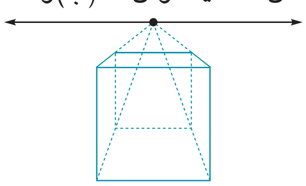
أ چوارگۆشەیەك بكێشە لە دوایدا ڕاستەهێڵێكی ئاسۆیی بكێشە ئاسۆ بنوێنێت. خاڵی پوكانەوەی لەسەر دیاریبكە.



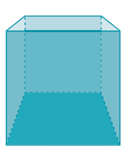
ب ڕاستەهێڵێكی خاڵدار و باریك بكێشە لە نێوان هەر سەرێك لەسەرەكانی چوارگۆشەكە و خاڵی پوكانەوە.



ج چوارگۆشەیەكی خاڵدار بچووكتر لە چوارگۆشەی یەكەم بكێشە سەرەكانی بكەوێتە سەر ڕاستەهێڵەكان كە كێشاوتن لە (ب)وە.



د لە وێنەكەدا هەموو ئەوانەی دەكەونە پشت چوارگۆشە بچوكەكە لابەبە، ڕاستەهێڵەكانی خاڵدار كە لە وێنەكەدا دەمێنێتەوە ئاماژە دەكەن بۆ ئەو لێوارانەی كە نابینرێن .

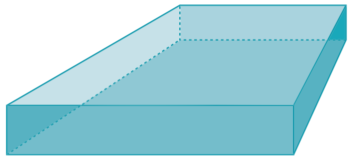


10 هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی خاڵی پوکانەوە بۆ لای چەپی یان لای ڕاستی چوارگۆشەکە.

11 هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ و خاڵی پوکانەوە لە ژێر چوارگۆشەکەدا

12 چی ڕوودەدات ئەگەر خاڵی پوکانەوە لە ناو چوارگۆشەکە یان لە سەر یەکێك لەلاکانی بێت

ئەم وێنەی خوارەوە دروست بکە لە سەر کاغەزێك بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 13 ، 14 .



13 خاڵی پوکانەوە لە وێنەکەدا دیاریبکە.

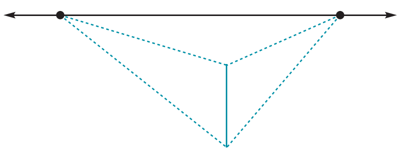
14 هێڵی ئاسۆ بکێشە

15 ئەو وێنە بینراوەی کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەیە پێیدەوترێت وێنەیەك بە دووخاڵی پوکانەوە.

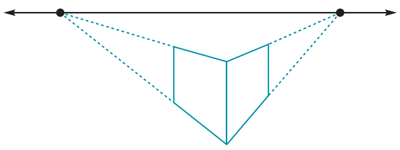
أ پارچە ڕاستەهێڵێکی ستونی بکێشە کە لای پێشەوەی شەشپاڵویەك بنوێنێ. هێڵێکی ئاسۆیی لەسەر ئەو پارچەیە بکێشە و دوو خاڵی پوکانەوە بکەونە هەردوو لای پارچە ڕاستەهێڵەکەوە هەڵبژێرە، هەروەك چۆن لە وێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە



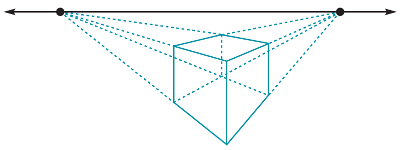
ب ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار و باریك کە هەردوو لای پارچە ستونەکە لەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت بکێشە هەروەك لەم وێنەدا ڕوونکراوەتەوە.



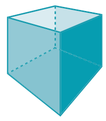
ج پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکان کە لایەکانی ڕووەکانی پێشەوەی شەشپاڵوەکە پێکدێنن بکێشە.



د پارچە ڕاستەهێڵێکی باریك و خاڵدار بکێشە کە لاکانی پارچەکانی کە وێنەت کێشاوە لە ج دا لەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت . پارچەیەکی ستونی خاڵدار بکێشە کە هەردوو خاڵی بەیەك گەیشتنی ڕاستەهێڵەکانی وێنەی بینراو کۆ دەکاتەوە



هـ هەموو ئەوشتانەی کەوتونەتە دەرەوەی لێوارەکانی شەشپاڵوەکە لاببە پارچە ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار بەکاربهێنە بۆ لایە نەبینراوەکانی شەشپاڵوەکە.



16 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ، و دوو خاڵی پوکانەوە لە ژێر پارچە ستونیەکەدا.

17 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هیڵی ئاسۆ، بەڕێگایەك کە لەگەڵ پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکە بەیەکبگەن.

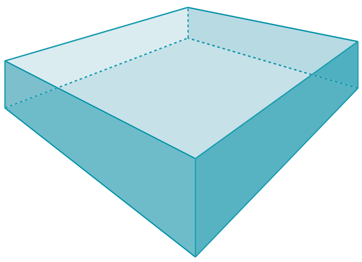
18 چی ڕوودەدات کە وێنەیەك دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت ئەگەر ئەو دوو خاڵە نزیککەوتنەوە؟ ئەگەر دورکەوتنەوە؟

19 چی ڕوودەدات لە وێنەیەك کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت کاتێك ئەو دوو خاڵە لە هەمان ڕووی پارچە ڕاستەهێڵە ستوونیەکەبن.

ئەم وێنەی خوارەوە لە سەر کاغەزێك بکێشە بۆ شیکاری هەردوو پرسیاری 20، 21 .

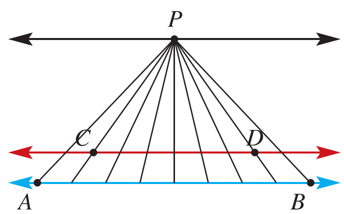
20 دوو خاڵی پوکانەوە لەم وێنەدا دیاریبکە.

21 هێڵی ئاسۆ بکێشە

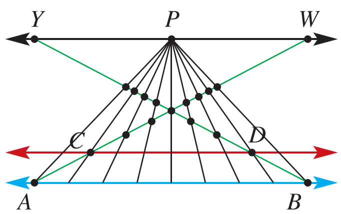


نەخشە ڕێژکردن و نەخشاندنی نیگاری کارێکی سەرنج ڕاکێشن بۆ هونەرمەندان و وێنەکێشان ئەوانەی دەستیان کردوە بە خوێندنی وێنە بینراوەکان. ئەم وێنانەی خوارەوە بە تەکنیکێکی دیاریکراو بۆ دەستکەوتنی شێوەی نەخشەڕێژی ڕیزکراو لە کرداری وێنەی بینراو دەنوێنێ. لەم وێنانەی خوارەوە وردبەرەوە بۆ شیکاری پرسیاری 22 بۆ 23 .

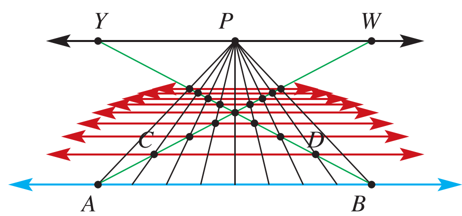
أ



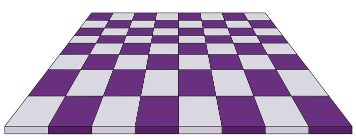
ب



ج



د



22 دەتوانیت هەردوو تیرەی $\overleftrightarrow{AW}$ ، $\overleftrightarrow{BY}$ بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوە ئەو ڕاستەهێڵانەی تەریبن بە ڕاستەهێڵی AB چۆن ئەو دوو تیرەیە بەکاردەهێنیت بۆ دیاریکردنی ئەو ڕاستەهێڵانە؟

23 چۆن دەتوانرێ شێوەی نەخشەڕێژی ببینیت لە گۆشەیەك لە گۆشەکانەوە بەبەکارهێنانی دوو خاڵی پوکانەوە؟ چۆن ڕاستەهێڵەکانی یەکتربڕ دیاری دەکەیت؟

24 نواندنی تایبەتی خۆت دروستبکە کاتێ یەك خاڵی پوکانەوە یان دوو خاڵی پوکانەوە بەکاربهێنیت بۆ نەخشەڕێژی چوارگۆشەکە.

ڕوانین بۆ دواوە

لەهەریەکە لەم پرسیارانەی خوارەوە ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن یان ئەستونن لەسەر یەکتری یان چ جۆریکی ترن.

25 $y = 3x + 5$
$y = 3x - 7$

26 $y = x + 2$
$y = 2 - x$

27 $y = 2x - 1$
$y = -2x + 4$

28 $2x + 3y = 6$
$3x - 2y = 6$

29 $ABCD$ لاکێشەیەکە $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ دووتیرەکەیەتی، بسەلمێنە کە دوو سێگۆشەی ACD و BCD جووتن.

وانەی

4

Regular Polygons چەندلا ڕێکەکان



بۆچی؟

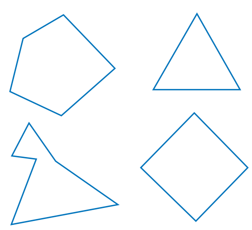
هەرچۆنێک بڕوانیتە ئیشە دەستیەکان لە دەوروبەرتدا چەندلاکان بەرچاو دەکەوێت تێگەیشتن لە سیفەتە بیرکاریەکانی چەندلاکان یارمەتیت دەدات بۆ بەکارهێنانیان لەکارە هونەریەکان و کرداریەکاندا

ئامانجەکان

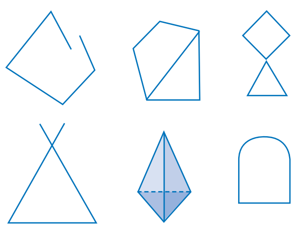
- چەندلاکان جیادەکاتەوە و ناویانلێدەنێت.
- چەندلاڕێکەکان و دانەکانیان جیادەکاتەوە.
- گۆشەکانی ناوەوە و چەقە گۆشەکان و ڕووبەرەکانیان هەژماردەکات.

Defining Polygons چەندلاکان

سەرەنجی ئەم وێنانەی خوارەوە بدە و پێناسەیەك بۆ هەرچەندلایەکیان هەڵبژێرە.



ئەم شێوانە چەندلان



ئەم شێوانە چەندلانین

ئەو پێناسەی کە هەڵتبژاردبوو بۆ چەندلا لەگەڵ ئەم پێناسەی خوارەوە بەراوردی بکە ئایا پێناسەکەت وەك ئەو پێناسەی خوارەوەیە؟ ئایا پێدراوی زیاتری تێدایە؟

Polygon چەندلا

چەندلا شێویەکی ئەندازەیی ڕووتەختە لە سێ پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت بە جۆرێك هەریەکێکیان لەگەڵ تەنها دوانی تریان یەکتردەبڕن، هەریەکی لە کۆتایی لایەکیدا ببڕێت. بە مەرجێك دووپارچەڕاستەهێڵی یەك بەدوای یەك لە ڕێکی یەکتر نەبن، پارچە ڕاستە هێڵەکان پێیان دەڵێن **لاکان Sides** چەندلایەکەو خاڵەکانی یەکتربڕین پێیان دەڵێن **سەرەکانی چەندلاکە Vertices**.

ناوی جیاواز لە چەندلاکان دەنرێن. بەپێی ژمارەی لایەکانی. ڕاهێنانبکە لەسەر ناولێنانی ئەو چەندلایانەی لە خشتەی خوارەوە داهاتوون.

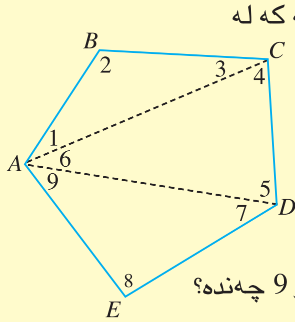
پۆلینکردنی چەندلایەکان بەپێی ژمارەی لایەکانی

ناو	ژمارەی لاکان	ناو	ژمارەی لاکان
سێگۆشە (سێلا) Triangle	3	نۆلا Nonagon	9
چوارلا Quadrilateral	4	دەلا Decagon	10
پێنجلا Pentagon	5	یازدەلا 11-gon	11
شەشلا Hexagon	6	دوازدەلا Dodecagon	12
حەفتلا Heptagon	7	سێزدەلا 13-gon	13
هەشتلا Octagon	8	نون لا n-gon	n

گۆشەکانی چەندلا Angles of a Polygon

چالاکی 1

سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە Angles of a Polygon



پێنجلای بەرامبەر بۆ سێ سێگۆشە دابەشکرا بە کێشانی ئەو تیرانە کە لە یەکێك لە سەرەکانیەوە دەرچووە.

1. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 چەندە؟
2. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 4 و 5 و 6 چەندە؟
3. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 7 و 8 و 9 چەندە؟
4. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 چەندە؟
5. لە پرسیارەکانی پێشوو سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوەی پێنج لا دەرئەنجام بکە.
6. ڕێگای پێشوو بۆ تەواوکردنی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەکاربهێنە.

چەندلا	ژمارەی لاکان	ژمارەی سێگۆشەکان	سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە
سێگۆشە (سێلا)	؟	1	180 پلە
چوارلا	؟	؟	؟
پێنج لا	؟	3	540 پلە
شەش لا	؟	؟	؟
چەندلای نونی	؟	؟	؟

7. ڕێسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك بەپێی ژمارەی لایەکانی ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە:

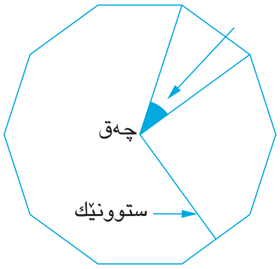
خاڵی چاودێری ✓

سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك Sum of the Interior Angles of a Polygon

سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك کە ژمارەی لایەکانی n بێت بریتییە لە ___؟___ پلە.

خاڵی چاودێری ✓

بەچەند لایەك دەڵێین ڕێك **Regular** ئەگەر لایەکانی لە درێژیدا یەکسانبن و گۆشەکانی ناوەوەی لە پێوانەدا یەکسانبن. چەندلای ڕێکی سێلا بریتیە لە سێگۆشەیەکی ڕێك. و چەندلایەکی ڕێکی چوارلا بریتییە لە چوارگۆشە.



چەقی چەندلای ڕێك ئەو خاڵەیە کە بەیەکسانی دوورە لە هەموو سەرەکانییەوە، ئەو گۆشەیەی کە سەرەکەی لەچەقی چەندلا ڕێکەکەدایەوە و دوولاکانی بە دوو سەری هاوسێ لە سەرەکانیدا دەڕوات پێی دەوترێت **چەقە گۆشە Central Angle** بۆ چەندلا ڕێکەکە. هەمووچەقە گۆشەکانی چەندلایەکی ڕێك یەکسانن.

ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە لە دواییدا ئەو ڕێسایەی کە لەدواوەی دێت تەواوبکە

چەند لایەکی ڕێك	ژمارەی لاکان	سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە	پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوە
سێگۆشە (سێلا)	؟	180 پلە	؟
چوارلا	؟	؟	90 پلە
پێنجلا	؟	؟	؟
شەشلا	؟	؟	؟
چەند لای نونی	؟	؟	؟

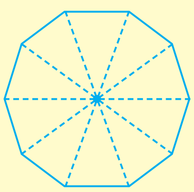
پێوانەی گۆشەی ناوەوەی چەندلای ڕێك

The Measure of an Interior Angle of a Regular Polygon

پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوە بۆچەندلایەکی ڕێك ژمارەی لاکانی n بێت بریتیە لە ____؟____ پلە

چالاکی 2

چەقە گۆشەکان لە چەندلایەکی ڕێکدا Central Angles of a Reguler Polygon



1. سەرجەمی پێوانەی چەقە گۆشەکان لە چەند لایەکی ڕێکدا چەندە
2. ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە.

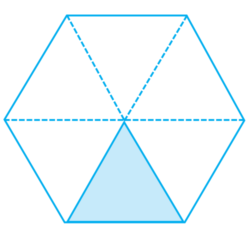
خاڵی چاودێری ✓

پێوانەی چەقە گۆشە لە چەندلای ڕێکدا

The Measure of a Central Angle of a Regular Polygon

پێوانەی هەر چەقەگۆشەیەك لە چەندلایەکی ڕێکدا ژمارەی لاکانی n بێت دەکاتە ____؟____ پلە.

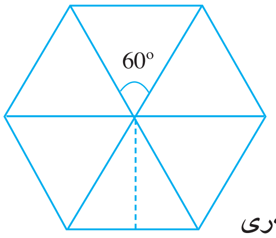
ڕووبەری چەندلای ڕێك Area of a reguler polygonr



ئەستوندەکی چەندلای ڕێك ئەو پارچە ڕاستەهێڵەیە کە چەقی چەندلایەکە دەگەیەنێت بە ناوەڕاستی یەکێك لە لایەکانی. تێبینی دەکەیت کە ئەستوندە بەرزی هەریەکە لە سێگۆشە ڕێکەکانە کە سەرەکەی لە چەقی چەندلا ڕێکەکە دایە و بنکەکە یەکێك لە لاکانی چەندلاکەیە. بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك، شەشلاکە دابەش دەکەین بۆ شەش سێگۆشەی هاوسێی ڕێکی جووت. ڕووبەری شەشلای ڕێك یەکسانە بە شەش ئەوەندەی ڕووبەری هەر یەکێك لە ڕووبەری سێگۆشەکان.

نموونە 1

هەژمێری ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك بکە درێژی لایەکی 20cm



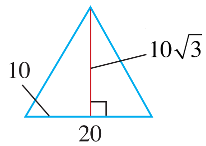
شیکار

بۆ ئەوەی ڕووبەری شەشلایەکە بدۆزینەوە پێویستە یەکەم جار ڕووبەری یەکێك لەو شەش سێگۆشەی کە شەشلاکەیان پێکهێناوە بدۆزینەوە، هەر سێگۆشەیەك لەو سێگۆشانە سێگۆشەیەکی ڕێکە. لەلایەکی ترەوە گۆشەی سەری سێگۆشەکە، چەقە گۆشەیەکە لە گۆشەکانی شەشلا ڕێکەکە. پێوانەکەی یەکسانە بە $360 \div 6 = 60$ لەوەوە بۆمان دەردەچێت کە هەریەکە لەو شەش سێگۆشەیە سێگۆشەی ڕێکن.درێژی لایەکی 20 Cm ، ئەستوندەکی شەشلا ڕێکەکە بریتیە لە بەرزی ئەو سێگۆشە ڕێکە.کەواتە، درێژی ئەستوندەکە یەکسانە بە: $20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

ڕووبەری هەر سێگۆشەیەك یەکسانە : $\frac{1}{2}(20)(10\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$

ڕووبەری شەشلا ڕێکەکە یەکسانە $6(100\sqrt{3}) = 600\sqrt{3}$

$1039\text{cm}^2 = 600\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



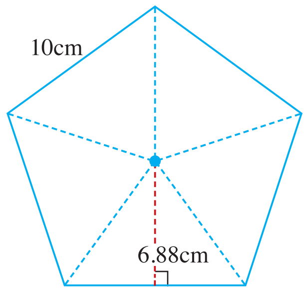
دەتوانیت ڕێگاکەی پێشوو بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلایەکی ڕێك کە ژمارەی لاکانی n بێت. دەتوانرێ ئەو چەندلایە دابەش بکرێت بۆ n سێگۆشە لە سێگۆشە جووت بووەکان.

Area of regula polygon ڕووبەری چەندلای ڕێك

ڕووبەری چەند لایەکی ڕێك ئەستوندەکەی a بێت و چێوەکەی P بێت دەکاتە $A = \frac{1}{2}ap$

نموونە 2

ڕووبەری پێنجلای بەرامبەر بدۆزەرەوە



شیکار

چێوەی پێنجلای ڕێکەکە $5 \times 10 = 50$

ڕووبەری پێنجلا ڕێکەکە $\frac{1}{2} \times 6.88 \times 50 = 172$

172cm^2

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ئایا دەتوانیت چوارلایەك بکێشیت سێ سێگۆشەی ناوەوەی هەبێت پێوانەی هەر یەکێکیان 60 پلە بێت ؟ هۆی وەڵامەکەت بنووسە
2. سێگۆشەیەکی ڕێك چەندلایەکی ڕێکە کە سێلای هەیە. بەرزییەکەی (ئەستوندەکەی) کامەیە؟
3. چوارگۆشە چەندلایەکی ڕێکە لە چوارلا پێکهاتووە ئەستوندەکەی کامەیە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەشتلایەك چەندە؟

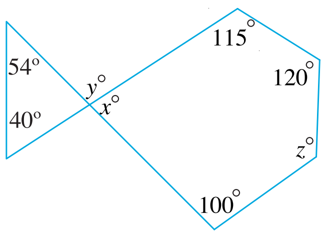
5 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی سێزدەلایەك چەندە؟

6 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی حەوتلایەك چەندە؟

7 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی یازدەلایەك چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

8 ئەم شێوەیەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی پێوانە داواکراوەکان



$x^\circ =$ ________

$y^\circ =$ ________

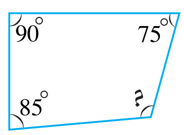
$z^\circ =$ ________

9 ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 12cm ؟

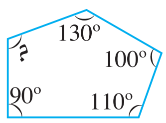
10 ڕووبەری دەلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 6m و درێژی ئەستوندەکەی 9.23m بێت.

پێوانەی گۆشەی نادیار لەهەریەك لە پرسیارەکانی 11–14 بدۆزەرەوە.

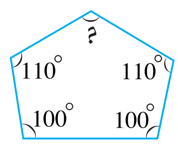
11



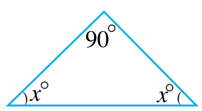
12



13



14



لە پرسیارەکانی 15 تا 18 پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە بدۆزەوە

15 چوارگۆشە

16 سێگۆشەیەکی ڕێك

17 دوازدەلایەکی ڕێك

18 پێنجلای ڕێك

ژمارەی لاکانی چەندلایەکی ڕێك چەندە ئەگەر پێوانەی هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی ناوەوەی یەکسان بێت بە

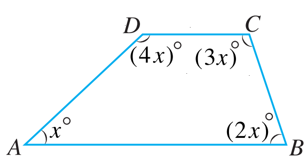
19 135° ؟

20 150° ؟

21 165° ؟

جەبر

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 22 تا 25 پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە؟بە پشت بەستن بە وێنەکەی بەرامبەر.



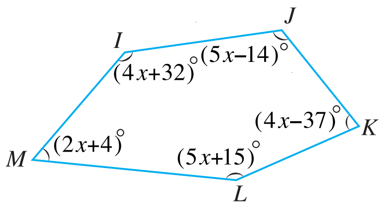
22 گۆشەی A

23 گۆشەی B

24 گۆشەی C

25 گۆشەی D

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی **26** تا **30** پێوانەی گۆشەکە دیاربیکە بەسەرنجدان لە وێنەکەی بەرامبەر.



26 گۆشەی I

27 گۆشەی J

28 گۆشەی K

29 گۆشەی L

30 گۆشەی M

چێوەو رووبەری هەر یەك لەو چەندلا ڕێکانە بدۆزەوە.وەڵامەکەت بەشێوەی برێکی ڕەگی و بە سادەترین شێوە بێت.

31 سێگۆشەیەکی ڕێك درێژی لاکەی 8 Cm

32 شەشلایەکی ڕێك درێژی لاکەی 13 m

33 چوارگۆشەیەك تیرەکەی 14 Cm

34 هەشتلایەکی ڕێك درێژی ئەستوندەکەی = 5 Cm

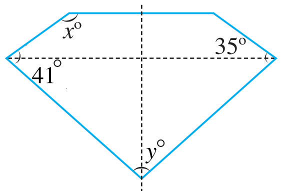
35 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەکانی سێگۆشە چەندە؟ ئایا سێگۆشە هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆی وەڵامەکەت دیاربکە.

36 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەکانی چوارلایەك چەندە؟ ئایا چوارلا هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆ بۆ وەڵامەکەت دیاربکە.

37 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەکانی پێنجلایەك چەندە؟ ئایا پێنجلا هەیە گۆشەی تیژی نەبێ؟ هۆی وەڵامەکەت دیاربکە

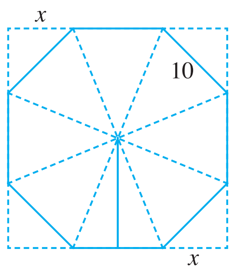
جێبەجێکردنەکان

38 بەردە بەنرخەکان ئەڵماس دەبڕدرێ لە شێوەی (برلنت) بۆ ئەوەی تواناى تیشکدانەوەکەی زۆربێ و گۆشەی برینەکان دیاری دەکرێت بە پێی سیفەتی بەردەکە لە شکاندنی تیشکی ڕووناکی، ئەم شێوەیەی خوارەوە پارچەیەکی هەڵبژاردەیە لە بەردی ئەڵماس بە شێوەیەك کەپارچەکە تەوەری هاوجێبوونی هەیە.گۆشەکانی ئەم شێوەیە هەژماربکە.



شێوەی بەرامبەر بەکاربێنە کە هەشتلایەکی ڕێك دەنوێنێ لە ناو چوارگۆشەیەکدا. بۆ شکاری پرسیارەکان لە 39 بۆ 42 .

39 جۆری ئەو سێگۆشانە بنووسە کە سەرەکانیان سەرەکانی چوارگۆشەکەن. و دەکەونە دەرەوەی هەشتلا ڕێکەکە؟ بەهای x هەژماربکە.



40 ئەستوندەکی هەشتلا ڕێکەکە بدۆزەرەوە

41 ڕووبەری هەشتلا ڕێکەکە بدۆزەرەوە

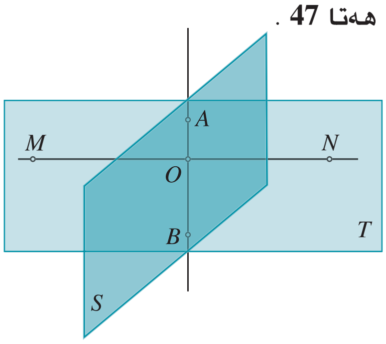
42 ڕووبەری هەشتلا ڕێکەکە کە درێژی لایەکی y بێت چەندە؟

43 ئایا چەندلایەکی ڕێك هەیە پێوانەی هەریەکە لە چەقە گۆشەکانی 50 پلە بێت؟

44 ئایا چەند لایەکی ڕێك هەیە پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی ناوەوەی 30 پلە بێت؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ڕوانین بۆ دواوە

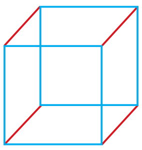
شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 45 هەتا 47 .



45 یەکتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵی AB و MN ناوبنێ.

46 سێ خاڵ دیاربکە کە ڕووتەختی T یان دیاریکردووە .

47 یەکتربڕینی دوو ڕووتەختی T و S ناوبنێ.



48 شێوەی بەرامبەر شەشپاڵویەك دەنوێنێ. ئەو ڕاستەهێڵانەی کە ڕەنگکراون بە سوور چیان پێ دەڵێین.

49 ئەگەر ئەو لا سوورانە درێژبکرێنەوە چی ڕوودەدات.

ڕوانین بۆ پێشەوە

50 خاڵی $A(2, 2)$ وخاڵی $B(4, 1)$ لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاربیکە

51 هەریەك لە پۆتانی خاڵی A لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازە C دەستدەکەوێت. خاڵی C دیاربیکە.

52 هەریەك لە پۆتانەکانی خاڵی B لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازە D دەستدەکەوێت خاڵی D دیاربیکە.

53 هەردوو ڕاستەهێڵی AB و CD چییان پێ دەوترێت؟هۆی وەڵامەکەت دیاربکە.

54 ئەگەر 4 بەکاربهێنی لە جیاتی 3 لە هەردوو پرسیاری 52 ، 53 ئایا بۆچوونەکەت دەگۆڕێ لە سەر هەردوو ڕاستەهێڵی AB ، CD ؟

وانەی 5

هاوڕێژەی ئەندازەیی Geometric Proportion



ئامانجەکان

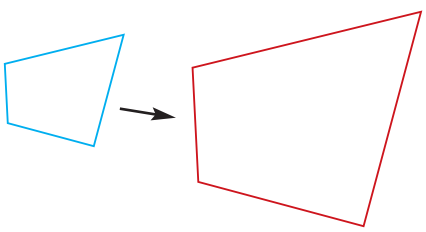
- هاوڕێژەی ئەندازەیی و دانەکانیان جیادەکاتەوە
- وێنەی شێوەیەك بە هاوڕێژەی ئەندازەیی پێکدێنێت.

بۆچی؟

کاتێك وێنەی مرۆڤێك بە ئامێرێکی کۆن دەگریت لە ژوورە تاریکەکەی ئامێرەکە وێنەیەکی هەڵگەڕاو بۆ ئەو مرۆڤە دروست دەبێت دەتوانی ئەمە ڕوونبکەیەوە بەبەکارهێنانی هاوڕێژەی ئەندازەیی.

دۆزینەوەی بنەمای کارکردنی ئامێری وێنەگرتن دەگەڕێتەوە بۆ زانای عەرەبی (ابن هیثم) کە لە نێوان ساڵەکانی 965–1 039 ك ژیاوە

سێ جێگۆڕکێ ئەندازەییت خوێندوە: کشانەوە و وێنەدانەوە و خولانەوە.ئەم جێگۆڕکێیانە بە سیفەتێکی گرنگ جیادەکرێنەوە. ئەویش بریتیە لە پاراستنی شێوە و پێوەرەکان. بەو جێگۆڕکێیانە دەلێین پارێزگاری لە پێوانە دەکات واتە پێوانەیین. لەم وانەیەدا جۆرێکی تازە لە جێگۆڕکێ دەخوێنین کە پارێزگاری لە پێوەرەکان دەکات. ئەویش هاوڕێژەی ئەندازەییە.



هاوڕێژەیی ئەندازەیی Dilation

وێنەی خاڵی $A(x, y)$ دەستدەکەوێت بە هاوڕێژەی ئەندازەیی، ئەویش بەلێکدانی هەریەك لە پۆتانەکەی لەهەمان ژمارە کەپێی دەوترێت کۆڵکەی هاوڕێژەکە **Scale Factor** . کەواتە وێنەی خاڵی $A(x, y)$ بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەرێژەی n دەکاتە (nx, ny).

نموونە 1

وێنەی خاڵی $(2, 3)$ بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەرێژەی 4 چەندە؟

شیکار

وێنەی خاڵی $(2\times 4,\ 3\times 4) = (8, 12)$

چالاکی 1

Geometric Proportion in the Coordinate Plane پۆتانی هاوڕێژەیی ئەندازەیی

1. خاڵی $A(3, 4)$ لە ڕووتەختی پۆتاندا دیاربیکە. یاسای دووری نێوان دوو خاڵ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی دووری خاڵی A و خاڵی بنەڕەت O لە ڕووتەختی پۆتاندا. ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە لە ڕێگای دیاریکردنی پۆتانی خاڵی A' کە وێنەی خاڵی A یە بەڕێژەی ئەندازەیی کە لە ستونی سێیەمدا ڕوونکراوەتەوە.

خاڵی A	AO	کۆڵکەی هاوڕێژە	وێنەی A'	OA'	$\frac{OA'}{OA}$
$(3, 4)$	؟	2	؟	؟	؟
$(3, 4)$	؟	0.5	؟	؟	؟
$(3, 4)$	؟	-1	؟	؟	؟
$(3, 4)$	؟	n	؟	؟	؟

2. خاڵی A وێنەکەی A' لە هەربارێکدا بکێشە. تێبینی چی دەکەیت لەسەر هەموو ئەو خاڵانە؟

3. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبکە.

گریمانە

ئەگەر A' وێنەی A و بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی ڕێژەکەی n. ئەوا $OA' = \underline{\quad ؟ \quad} \times OA$.

خاڵی چاودێری ✓

4. خاڵی $A(3, 4)$ جارێکی تر دیاربیکە و خاڵی $A(5, 6)$ لەگەڵی دیاربیکە ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

خاڵی B	AB	کۆڵکەی هاوڕێژە	وێنەی B'	$A'B'$	$\frac{A'B'}{AB}$
$(5, 6)$	؟	2	؟	؟	؟
$(5, 6)$	؟	0.5	؟	؟	؟
$(5, 6)$	؟	-1	؟	؟	؟
$(5, 6)$	؟	n	؟	؟	؟

جەبر

5. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبکە:

گریمانە

ئەگەر $\overline{A'B'}$ وێنەی پارچە ڕاستەهێڵی AB بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی بەڕێژەی n
ئەوا $A'B' = \underline{\quad ؟ \quad} \times AB$

خاڵی چاودێری ✓

6. لاری ڕاستەهێڵی AB بدۆزەرەوە

7. لاری ڕاستەهێڵی $A'B'$ لەهەربارێکدا بدۆزەوە.

8. ئەم گریمانەی خوارەوە تەواوبکە

گریمانە

هاوڕێژەی ئەندازەیی پارچە ڕاستەهێڵێك دەگۆڕێت بۆ پارچە ڕاستەهێڵی $\underline{\quad ؟ \quad}$

هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی بەخاڵێك و وێنەکەی بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی دیاریکراودا دەڕۆن لەیەك خاڵدا بەیەکدەگەن. پێی دەوترێت (چەقی هاوڕێژە). هەموو هاوڕێژە ئەندازەییەکان لە چالاکی 1 دا چەقەکەیان خاڵی بنەڕەتە. هەموو هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقێکی هەیە.

جێبەجێکردنەکان

ڕۆناکی

بیلبیلەی چاو فراوان دەبێتەوە یان تەسک دەبێتەوە بۆ ڕۆیشتنی ڕووناکی پێویست پیایدا تاکو مرۆڤ بتوانێت شتەکان ببینێت لەڕۆژدا تەسک دەبێتەوە و لە شەودا فراوان دەبێت لە ئامێری وێنەگرتندا ئەم شتە وەك بیلبیلەکە وایە.بۆ دەست بەسەراگرتنی بڕی ڕووناکی پێویست بۆ گرتنی وێنەیەکی باش





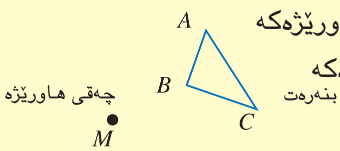
بیلبیلەی چاوەکە لە وێنەی چەپدا تەسک بۆتەوە چونکە بڕی ڕووناکیەکە زۆرە. بەڵام لە وێنەی لای ڕاستدا زیاتر کراوەتەوە چونکە بڕی ڕووناکی پێویست کەمترە؟

لە چالاکی 1 دا تێبینیت کرد کە درێژی وێنەی پارچە ڕاستەهێڵەکە بەگۆڕانی کۆڵکەی هاوڕێژەکە دەگۆڕێت. کاتێك پێوەرەکانی وێنەکە بچووکتربێت لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژە دەوترێت بچووك کردنەوە و کاتێك پێوەرەکانی وێنەکە گەورەتر بوو لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژەیە دەوترێت (گەورەکردن).

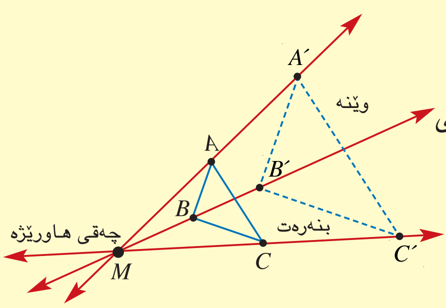
بیرکردنەی ڕەخنەگرانە چیمان دەستدەکەوێت لە وێنەی خاڵێك یان پارچە ڕاستەهێڵێك بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کەرێژەکەی سالیب بێت؟

چالاکی 2

کێشانی وێنەی شێوەیەك بە هاوڕێژەی ئەندازەیی Drawing a Dilation



1. سێگۆشەیەك بکێشە وخاڵێکی دەرەوەی، M کە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت، ئەو ڕاستەهێڵانە بکێشە کە بەچەقی هاوڕێژەکە و هەموو سەرەکانی سێگۆشەکەدا دەڕۆن.
2. ژمارەیەکی موجەب n هەڵبژێرە بۆ کۆڵکەی هاوڕێژەکە، سەرێك لە سەرەکانی سێگۆشەکە وەك B هەڵبژێرە، و دووری x بدۆزەرەوە لە نێوان ئەو سەرە و چەقی هاوڕێژەکە. دووری x لە کۆڵکەی هاوڕێژەکە n بدە بۆ ئەوەی دووری نێوان وێنەکە B لە لوتکەی B و چەقی هاوڕیژەکە M دەستکەوێت.خاڵێك لە سەر MB وەربگرە کە لە چەقی هاوڕیژەکە بە nx. ئەو خاڵە خاڵی B' وێنەی سەری B یە کە هەڵت بژاردبوو بەهاوڕێژەیی.
3. کردارەکە دووبارە بکەوە.
4. هەرسێ خاڵە دەستکەوتووەکە بەیەکبگەیەنە سێگۆشەیەکی تازەت دەستدەکەوێت کە وێنەی سێگۆشە بنەڕەتییەکەیە بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی.



خاڵی چاودێری ✓

نموونە 2

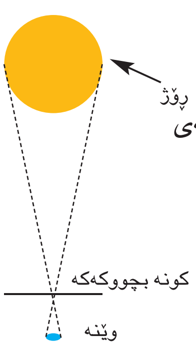
لەم وێنەیەی خوارەوە دوو خوێندکار چاودێری گیرانی ڕۆژیان دەکرد لە کونێکی بچووکەوە. بۆ ئەوەی کردارەکە تێبگەی وایدابنێ کە کارەکە پابەندە بە وێنەی ڕۆژەکە بەهاوڕێژەیەك کە چەقەکەی بکەوێتە کونە بچووکەکەوە. تیرەی ڕۆژ دەکاتە 1 400 000km بەنزیکی تێکرای هاوڕێژە چەندە؟ ئەگەر تیرەی وێنەی. ڕۆژەکە 0.63cm بێت.

جێبەجێکردنەکان

گەردوون



شیکار



وێنەی بەرامبەر ڕێڕەوی تیشکی ڕۆژ ڕووندەکاتەوە کە لە لاکانی ڕۆژەکە دەردەچێت هەروەکو دەیبینین لە زوویەوە. ڕێژەی هاوڕێژەکە سالبە. چونکە وێنەی ڕۆژەکە دەکەوێتە لاکەی تر بەپێی چەقی هاوڕێژەکە (کونە بچووکەکە) بۆ دەستکەوتنی کۆڵکەی هاوڕێژەیی تیرەی وێنەکە دابەش دەکەین بەسەر تیرەی ڕۆژەکەدا وەك لە خوارەوە دەردەکەوێت.

$$\frac{0.63}{1400000 \times 100000} = \frac{0.63}{1.4 \times 10^{11}} = \frac{63}{140} \times 10^{-11} = 4.5 \times 10^{-12}$$

ڕاهێنــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 بەچی هاوڕێژەی ئەندازەیی لە جێگۆڕکێ ئەندازەیەکانی تر جیادەکرێتەوە.

2 کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی چییە؟چۆن کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی دیاریدەکەیت. بەزانینی پارچە ڕاستەهێڵ و وێنەکەی؟

کاریگەری هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕوونبکەوە لەسەر وێنەی شێوە ئەندازەییەك ئەگەر کۆڵکەکەی یەکسان بێت بە:

3 2 **4** 0.5 **5** -1 **6** 1

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

چەقی هاوڕێژەیی ئەندازەیی لە پرسیاری 7 بۆ 10 خاڵی بنەڕەتە وێنەی خاڵەکە لە هەر جارێکدا دیاریبکە لە دوایدا خاڵ و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا بکێشە.

7 خاڵەکە: $(1, 5)$ ڕێژەکە : 3

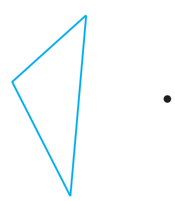
8 خاڵەکە: $(-1, 4)$ ڕێژەکە : 2

9 خاڵەکە: $(6, -2)$ ڕێژەکە : 0.25

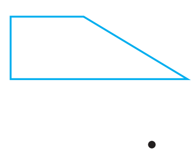
10 خاڵەکە: $(2, 3)$ ڕێژەکە : -2

شێوە و چەقی هاوڕێژە درووستبکە، لە دوایدا وێنەی شێوەکە بەهاوڕێژەیی n بکێشە:

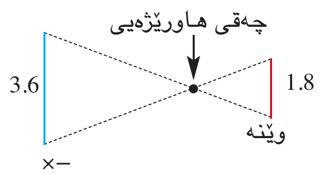
11 $n = 2$



12 $n = -1$



13 وێنەی بەرامبەر پارچە ڕاستەهێڵێك و وێنەکەی بە هاوڕێژییەکی ئەندازەیی ڕووندەکاتەوە. ڕێژەی ئەو هاوڕێژەیە چەندە؟



ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 14–17 سەرەکانی شێوە ئەندازەییەك دەنوێنێت و کۆڵکەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە لەخۆدەگرێت کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتانەدا. وێنەی هەر سەرێك لە سەرەکانی هەر شێوەیەك دیاریبکە. لە دوایدا شێوە بنەڕەتییەکە و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتانەدا بکێشە.

14 $(4, 3)$؛ $(2, 5)$؛ $(1, 3)$؛
ڕێژەکە= : 2

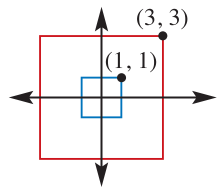
15 $(2, -6)$؛ $(8, 9)$؛ $(-3, 5)$؛
ڕێژەکە = $\frac{1}{3}$

16 $(2, 3)$؛ $(4, 4)$؛ $(6, 0)$؛ $(0, 0)$
ڕێژەکە = $-\frac{1}{2}$

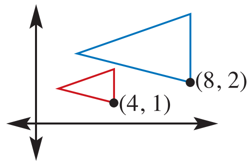
17 $(-2, -3)$؛ $(3, -1)$؛ $(1, 1)$؛
ڕێژەکە = 1.6

هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 18–21 دوو شێوەی تێدایە یەکێکیان سوور و ئەوەی تریان شینە. شێوە سوورەکە وێنەی شێوە شینەکە دەنوێنێ بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتاندا.ڕێژەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە لە هەر جارێکدا دیاریبکە:

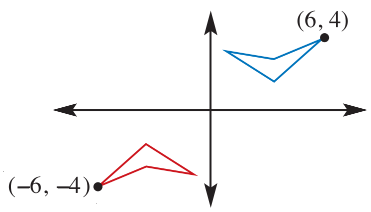
18



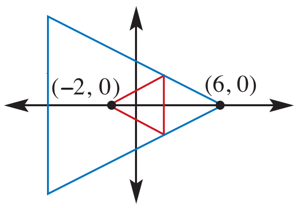
19



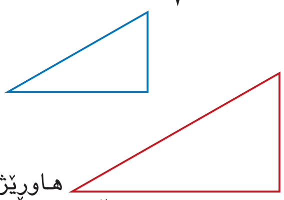
20



21



22 ئەم شێوەیە بەرامبەرت بكێشە و چەقی هاوڕێژە و ڕێژەکەی دیاریبکە.



هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 23–26 پۆتانی هەردوو سەری پارچە ڕاستەهێڵێکن، ڕێژەی هاوڕێژەیی ئەندازەیەکەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. بەبەکارهێنانی لاری ڕوونیبکەرەوە کە وێنەی پارچەڕاستەهێڵەکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بریتییە لە پارچە ڕاستەهێڵێك تەریبە بەبنەڕەتەکەی.

23 $(1\,،0)$ و $(5\,،3)$ $n=2$

24 $(-2, 3)$ $(3\,،1)$ $n=5$

25 $(-2, 4)$ و $(4, 8)$؛ $n=\frac{1}{2}$

26 $(1, 1)$ و $(2\ , 4)$ $n=1.7$

جەبر

هەر پرسیارێك لە پرسیارەکانی 27–30 پۆتانی خاڵێك و کۆڵکەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا. بسەلمێنە کە ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵەکەو وێنەکەی دادەڕوات بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بە خاڵی بنەڕەت دادەڕوات لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا.

27 $(1, 5)$؛ $n=4$

28 $(3, -2)$؛ $n=\frac{5}{6}$

29 $(-5, 3)$؛ $n=-3$

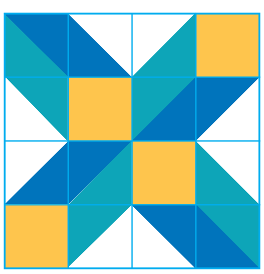
30 $(7, 4)$ ؛ $n=2.5$

بەرەنگاری

31 لە نموونەکانی هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی نەکەوێتە خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆتاندا ئەو جێگۆڕکێیانەی کە خاڵی (x, y) دەگۆڕێت بۆ خاڵی $(2x-4, 2y-3)$ ئەو پارچە ڕاستەهێڵە بکێشە کە دوو سەرەکانی بریتین لە $(2, 3)$ و $(5, 5)$ وێنەکە بکێشە بە جێگۆڕکێییەی پێشوو.چەقی هاوڕێژەی ئەندازەیی و ڕێژەکەی دیاریبکە لەوەی پێی هەستایت: سوود وەربگرە بۆ نوسینی پۆتانی خاڵی(x, y)بەوڕێژە ئەندازەیەی کە چەقەکەی خاڵی $(1, 2)$ و ڕێژەکەی 4 بێت.

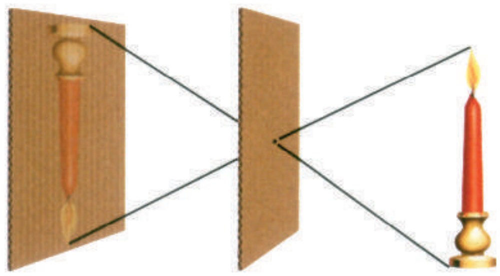
جێبەجێکردنەکان

32 گلارە ویستی ئەم شێوەیەی بەرامبەر گەورە بکات لەسەر چوارگۆشەیەك کە لاکەی12cm لە جیاتی 4cm کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێگاپێدراو بۆ ئەم کارە چەندە؟پۆتانی سەرەکانی یەکێك لە لاتەریبەکان ئەمانەن $(0, 0)$؛ $(1, 1)$؛ $(1, 2)$؛ $(0, 1)$ پۆتانی وێنەی هەرسەرێك لەسەرەکانی دیاریبکە، بە گەورەکردن لەدواییدا وێنەی لاتەریبەکە بکێشە. شێوە بنەڕەتیەکەی لاتەریبەکەو وێنەکەی بەتەواوەتی لەسەر ڕووتەختی پۆتان بکێشە.



جێبەجێکردنەکان

وێنەی بەرامبەر هێڵکاریەك ڕووندەکاتەوە کە چۆن ئامێری وێنەگرتن کاردەکات.



33 کام بەش لە ئامێری وێنە گرتنەکە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت؟

34 ئایا کۆڵکەی هاوڕێژەکە موجەبە یان سالبە؟ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

35 ئەو هۆیە چییە کەوا لە وێنەکە دەکات هەڵگەڕاوەبێت.

36 یەکێك لە ئەندازیارەکان هەستا بە بچووککردنەوەی هێڵکاری خانوێك بەبەکارهێنانی ئامێری لەبەرگرتنەوە. پانی هێڵکاریەکە 15 cm و پانی وێنەکە 6 cm بوو. ڕێژەی بچووککردنەوەکە چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

37 چێوەی سێگۆشەیەکی دوولایەکسان بدۆزەوە کە درێژی بنکەکەی 6cm و درێژی لایەکی 8cm ڕووبەرەکەشی بدۆزەوە.

جێبەجێکردنەکان

38 درێژی ژێی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە، کە پێوانەی گۆشەکانی 45 ، 45 ، 90 و درێژی لایەکی 7cm .

39 **زەوی ناسی** چێوەی گەورەترین بازنەی زەوی دەگاتە 40 000km ئایا نیوەتیرەی زەوی چەندە؟

40 **زەوی ناسی** بەرزی بەرگە هەوای زەوی دەگاتە 550km ئەم زانیارییە بەکاربێنە بۆ وەڵامی پرسیاری 39 بۆ هەژمارکردنی-Ì ôá_fô گۆی زەوی لەگەڵ بەرگە هەواکەی.

ڕوانین بۆ پێشەوە

جێبەجێکردنەکان

کورسی پێچکەدار یەکێك لە ئەندازیاران ویستی دیزاینێك دابنێت بۆ کورسیەکی پێچکەدار کە پەککەوتووەکان بەکاری دێنن بۆ بەشداریکردن لە یاری تۆپی سەبەتە. بڕیاریدا کە تیرەی پێچکەکە 56cm بێت.

41 کورسی پێچکەدارەکە کاتێك 45° دەخولێتەوە چەند بەرەو پێشەوە دەڕوات.

42 درێژی یاریگایەکی تۆپی سەبەتە 23.5m . چەند خول تایەکە دەخولێتەوە بۆ ئەوەی کورسیە تایەدارەکە یاریگەکە ببڕێت و بچێتە لایەکی تری.



وانەی 6

بازنە Circles



ئامانجەکان

- هاوکێشەی بازنە دەنووسێت و بەکاریدەهێنێت.
- هاوکێشەی بازنە بە پێی گۆڕانی چەقەکەی ڕاستدەکاتەوە.

بۆچی؟

بەرنامە ئەندازەییەکان ژمارەیەك لە شێوە ئەندازەییەکان دروست دەکەن وەك خاڵ و ڕاستەهێڵ بازنە. ئەم بەرنامانە هاوکێشە جەبری تایبەت بەو شێوانە بەکاردەهێنێت.

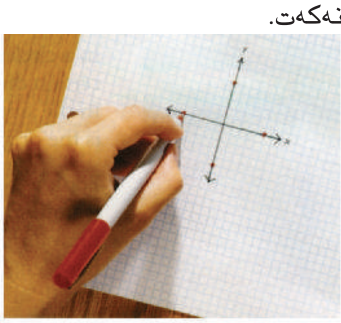
کێشانی بازنە لە هاوکێشەکەیەوە Graphing Circle From an Equation

لە ماوەی خوێندنی ڕابردوو کۆمەڵێك هاوکێشەی جۆراوجۆر هاتۆتەڕێت وەك $y=2x-3$ (هاوکێشەی ڕاستەهێڵ) یان $y=x^2-3$ (هاوکێشەی برگەی هاوتا) لەم وانەیەدا جۆرە هاوکێشەیەك دەدۆزیتەوە کە x و y بە دووجایی تێدا دەردەکەوێت.

نموونە 1

هێڵە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $x^2+y^2=25$ بکێشە بە دۆزینەوەی ژمارەیەك لە جووتە ڕێکخراوەکان (x, y) کە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکەن و دیاریکردنی ئەو **خاڵانەی سەر بەو هاوکێشەیەن**. ئەو شێوە ئەندازەییە لە **هێڵە ڕوونکردنەوەیەکە بناسە**. دەتوانیت پەنا بەریتە بەر بژمێری ڕوونکردنەوە (حاسبة بيانية) بۆ دڵنیابونت لە ڕاستی وێنەکەت.

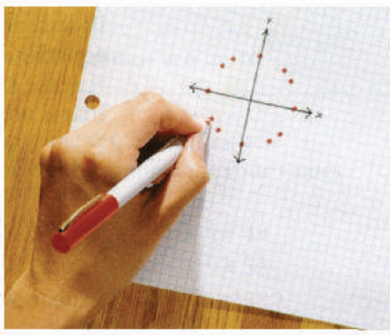
جەبر



شیکار

لە کاتی هەوڵدانت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوە بۆ جۆرێکی تازە لە هاوکێشەکان یەکەم جار هەوڵبدە ئەو خاڵانە دیاری بکەیت کە هەردوو تەوەرەکەی تێدا دەبڕێت. بۆ دیاریکردنی خاڵی یەکتر برین لەگەڵ تەوەرەی سینی لە جیاتی گوراوی y سفر دابنێ ($y=0$).

$x^2+0^2=25$ ، یان $x^2=25$ ، یان $x=\pm 5$



هێڵە ڕوونکەرەوەکە تەوەرەی سینی لە خاڵی$(5, 0)$ و$(-5, 0)$ دەبڕێت
بۆ دۆزینەوەی خاڵی یەکتربڕینی هێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی صادی. y بدۆزەرەوە بە دانانی $x = 0$
$0^2 + y^2 = 25$ یان $y^2 = 25$ یان $y = \pm 5$ هێڵە ڕوونکەرەوە کە تەوەرەی صادی لە خاڵی $(0, 5)$ و $(0, -5)$ دەبڕێت لە دوای ئەوە لە جیاتی گۆڕاوی x چەند بەهایەکی تر وەربگرە وەك 3
$$3^2 + y^2 = 25$$
$y^2 = 16$ یان $y = \pm 4$ هێڵە ڕونکەرەوەکە بە هەردوو خاڵی $(3, 4)$ ، $(3, -4)$ دا دەڕوات. بەم شێوەیە دەتوانیت ئەم خشتەیەی بەرامبەر دروستبکەیت بە لەجیاتی دانانی گۆڕاویx بەچەند بەهایەکی گونجاو.ئەو خاڵانەی لە خشتەکەدا هاتووە لەسەر ڕووتەختی پۆتان دیاریبکە و خاڵەکان بگەیەنە ئەو وێنەی دەستتدەکەوێت بریتییە لە و بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 5 . ئەو بازنەیە بکێشە.

x	y	خاڵ لەسەر هێلەکە
3	± 4	$(3, -4)$ و $(3, 4)$
-3	± 4	$(-3, -4)$ و $(-3, 4)$
4	± 3	$(4, -3)$ و $(4, 3)$
-4	± 3	$(-4, -3)$ و $(-4, 3)$

سەرەنجی ڕەخنەگرانە

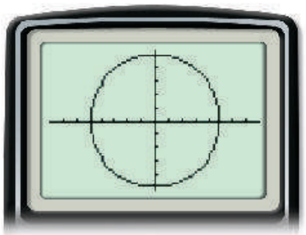
چۆن وێنەی ڕوونکردنەوەکە دەگۆڕێت ئەگەر لە جیاتی ژمارە 25 ژمارەکانی 49 و 81 و 51 لە هاوکێشەکەیدا دابنرێن.

Using Graphing Technology بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی



دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربهێنیت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی. بژمێرەکە داوات لێ دەکات کە هاوکێشەکە بخەیتە ناو بژمێرەکەوە لەسەر شێوەی $y = \ldots$ پێویستە لە سەرت هاوکێشەکە شیکار بکەیت بۆ دۆزینەوەی y بەپێی x .

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

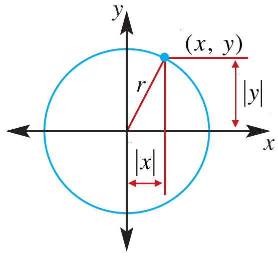


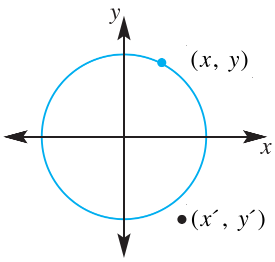
جەبر

بەم شێوەیە دەتوانیت وێنەی هێڵی ڕونکردنەوەی بۆ هاوکێشەی $y = \sqrt{25 - x^2}$ و $y = -\sqrt{25 - x^2}$ بکێشیت.

گرێدان
ئەندازەی تەرەوەکان

Deriving the Equation of a Circle پێکهێنانی هاوکێشەی بازنە





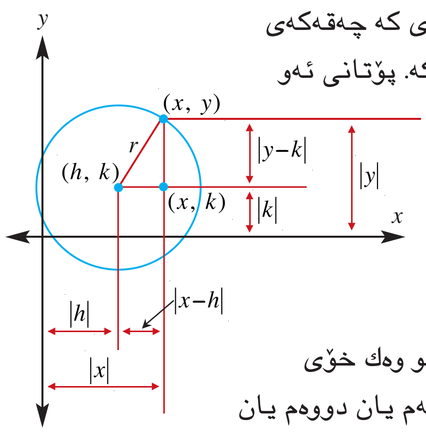
بازنە کۆمەڵەخاڵێکە بەدووری یەکسان نت (نیوەتیرە)لە خاڵێکی دیاری کراوەوە (چەقی بازنە). بەسادەترین شێوە دەستپێبکە ئەویش کە خاڵی بنەڕەت ببێتە چەقی بازنە.
خاڵی (x, y) هەڵبژێرە لەسەر بازنەکە کە ناکەوێتە سەر هەردوو تەوەرەکان سێگۆشەیەکی گۆشەوەستاو بکێشە لەو خاڵەوە دەستپێ بکات. هەروەک لەم وێنەی بەرامبەر ڕونکراوەتەوە. درێژی دوولای گۆشە وەستاوەکە بریتیە لە $|x|$ و $|y|$ و درێژی ژێیەکەی بریتیە لە درێژی نیوەتیرەکەی کە درێژبۆتەوە لە نێوان خاڵە هەڵبژاردەکەی سەربازنەکە و خاڵی بنەڕەت. بەوشێوەیە دەبینیت پۆتانی خاڵە هەڵبژاردەکە لە سەر بازنەکە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکات

$x^2 + y^2 = r^2$ هاوکێشەی 1

دەتوانیت پاسەدانی ئەوە بکەیت کە پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکاتە. بەرامبەر ئەوە ئەگەر $(x´, y´)$ خاڵێك بێت لە دەرەوەی بازنەکە، دووری ئەو خاڵە لە بنەڕەتەوە یەکسان نیە بە r ، لەم ئەنجامەوە بۆمان دەردەکەوێت کە پۆتانی ئەو خاڵە پاسادانی هاوکێشەکەی پێشو ناکات. کەواتە $(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی $(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$ کاتێك $(x´, y´)$ ناکەوێتە سەربازنەکە؟ تێبینیبکە کە هاوکێشەی 1 ئەم دوو سیفەتەی تێدایە:
هەر خاڵێك بکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە دەکات.
هەر خاڵێك نەکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە ناکات.
لەوەی پێشوەوە بۆمان دەردەکەوێت کە هاوکێشەی $x^2 + y^2 = r^2$ هاوکێشەی بازنەیەکە نیوەتیرەکەی (نت) یە و چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە.

Moving the Center of the Circle جولانی چەقی بازنە



بۆ دۆزینەوەی شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی ناکەوێتە خاڵی بنەڕەتەوە. سەیری شێوەی بەرامبەربکە. پۆتانی ئەو خاڵەی دەکەوێتە سەربازنەکە کە پاسادانی هاوکێشەی بازنەکە دەکات.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ هاوکێشەی 2

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چۆن ڕوونیدەکەیتەوە کەپەیوەندیەکان لە شێوەی پێشو وەك خۆی دەمینیتەوە ئەگەر خاڵی (h, k) بکەوێتە چارەکی یەکەم یان دووەم یان سێیەم یان چوارەم .

نموونە 2

چەقی ئەم بازنەیە دیاریبکە کە هاوکێشەکەی $(x-7)^2+(y+3)^2=36$ لە دواییدا نیوەتیرەکەی دیاریبکە.

شیکار

ئەگەر هاوکێشەی دراو لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنە بەراوردبکەین.

ئەم لێکچوونانەی خوارەوە دەبینی .

لە شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیی	لە هاوکێشەی دراو
$(x-h)^2$	$(x-7)^2$
$(y-k)^2$	$(y+3)^2=\big((y-(-3)\big)^2$
r^2	36

ئەم بەراوردکردنە ڕێگات پێدەدات کە بڵێیت $h=7 \quad k=-3 \quad r=6$

چەقی بازنەکە بریتییە لە خاڵی$(7,\ -3)$ یە و نیوەتیرەکەی یەکسانەبە 6 یەکەی درێژی.

هەوڵبدە چەق و نیوەتیرەی هەربازنەیەك لەم بازنانەی خوارەوە دیاریبکە. وێنەی هەر بازنەیەکیان بکێشە و وێنەکە لەگەڵ ئەوانەی دۆزیوتەوە بەراوردبکە.

أ $(x+3)^2+(y-3)^2=49$

ب $(x-3)^2+(y+3)^2=49$

ج $(x-4)^2+(y-5)^2=30$

د $(x+2)^2+(y-5)^2=50$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکێشەکەی$x^2+y^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت؟

2 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکیشەکەی $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت.

3 ئایا بازنەیەك هەیە هەردوو تەوەرەکە نەبڕێت؟ وێنەکەی چۆن دەردەکەویت لەم بارەدا؟

4 یاسای دووری نێوان دووخاڵ بەکاربهێنە بۆ نووسینی دووری نێوان دوو خاڵی $(x,\ y)$ و$(h,\ k)$ چ شتێك ئەم برە و شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەکە بەیەکدەبەستێتەوە؟



5 تەکنەلۆجیا زۆر جار کاری بژمێری ڕوونکردنەوە، بۆ کێشانی وێنەی هاوکێشە دراوەکان لە سەر شێوەی...$=y$ دەبێت. چۆن شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیەك شیکاردەکات بە پێی گۆڕاوی x؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی $x^2 + y^2 = 100$ بەکاربهێنە لە پرسیارەکانی 6 بۆ 8 .

6 خاڵی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە.

7 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

x	y	خاڵ لەسەر بازنەکە
0	?	?
؟	0	?
6	?	?
-6	?	?
8	?	?
-8	?	?

8 ئەو خاڵانەی لەخشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاربکە لە دواییدا وێنەی بازنەکە بکێشە.

هاوکێشەی $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 9 بۆ 11 .

9 چەقی بازنەکە دیاریبکە.

10 خاڵەکانی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەریەکە لە دوو تەوەری پۆتان دیاریبکە.

11 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

x	y	خاڵ لەسەر بازنەکە
0	?	?
؟	0	?
1	?	?
-1	?	?
4	?	?
7	?	?
8	?	?
9	?	?

12 ئەو خاڵانەی لە خشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکە لەدواییدا وێنەی بازنەکە بکێشە

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

خاڵەکانی یەکتربڕینی هەربازنەیەك لەم بازنانەی خوارەوە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە.

13 $x^2 + y^2 = 64$

14 $x^2 + y^2 = 50$

15 $x^2 + (y-4)^2 = 25$

16 $(x-2)^2 + y^2 = 9$

17 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

هاوکێشەی بازنەکە بنووسە ئەگەر چەق و نیوەتیرەکەی بزانیت

	چەق	نیوەتیرە
18	(0, 0)	6
19	(0, 0)	2.5
20	(0, 0)	$\sqrt{13}$
21	(2, 3)	4
22	(0, 6)	5
23	(4, −5)	7
24	(1, −7)	10
25	(4, −3)	$\sqrt{7}$

جەبر

چەق و نیوەتیرەی هەر یەك لەم بازنانەی خوارەوە بدۆزەوە.

26 $x^2+y^2=100$

27 $x^2+y^2=36$

28 $x^2+y^2=101$

29 $(x-6)^2+y^2=9$

30 $x^2+(y-3)=4$

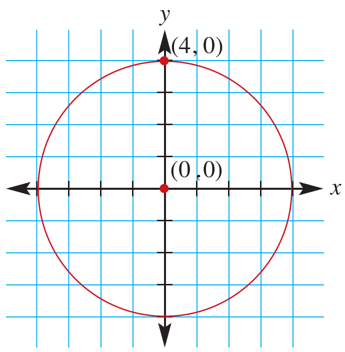
31 $(x+5)^2+(y-2)^2=16$

32 $x^2+(y+3)=49$

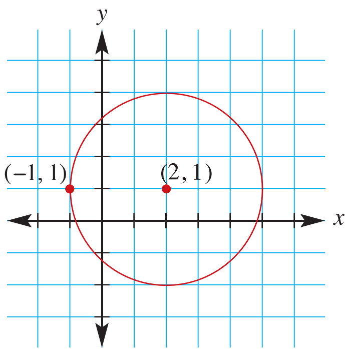
33 $(x+1)^2+(y+3)^2=19$

هاوکێشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە لەم وێنانەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

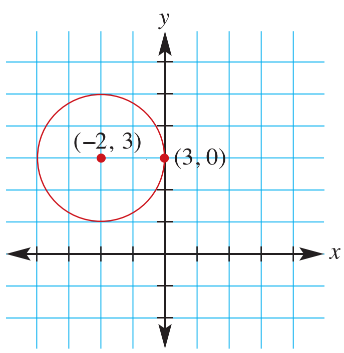
34



35



36



جەبر

خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەم بازنە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان وەك لەم خشتەیەدا دراوە بدۆزەوە

بە پێی ئەو خاڵانە بۆ هەریەکێکیان وێنەی بازنەکە بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە .

	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری صادی
37	3 و −3	3 و −3
38	6 و 2	یەکتربڕین نییە
39	سفر	0 و 8
40	یەکتربڕین نییە	5
41	یەکتربڕین نییە	یەکتربڕین نییە

جەبر

هاوکێشەی ئەو بازنانە بدۆزەوە بەپێی ئەم زانیاریيانەی دراوە، باشتر وایە وێنەکە بکێشيت.

42 چەقەکەی $(2, 3)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری سینەکان.

43 چەقەکەی $(2, 3)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری صادەکان.

44 چەق: $(0, 1)$؛ بەخاڵی $(4, 4)$ دا دەڕوات

45 چەق: $(2, 3)$؛ بەخاڵی $(8, 3)$ دا دەڕوات

46 چەق: $(2, 3)$؛ بەخاڵی $(8, 11)$ دا دەڕوات

47 $(1, 3)$ و $(5, 3)$دووسەری یەکێك لە تیرەکانیەتی

بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 48 تا 54 .

48 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیەش بنووسە.

49 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-4)^2+(y-2)^2=1$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

50 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-2)^2+y^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 6 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

51 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-6)^2+(y-4)^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 2 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی وێنەکە بنووسە.

52 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-5)^2+(y-4)^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە خولانەوەی گۆشەکەی بە 180 بکێشە لە دەوری خاڵی بنەڕەت بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەکە بنووسە.

53 هاوکێشەی لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=100$ لە خاڵی $A(-6, 8)$ بدۆزەرەوە.

بەرەنگاری

54 ئەو سێگۆشەیەی کە سەرەکانی $(0, 0)$، $(0, 6)$، $(8, 0)$ بن بکێشە لە دواییدا هاوکێشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە بەسەرەکانیدا ڕۆیشتوە.

ڕوانین بۆ دواوە

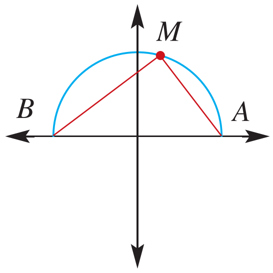
55 پاوان تیرێکی هەڵدا بۆ سەر وێنەی بازنەیەك کە هاوکێشەکەی $x^2+y^2=100$ ئەگەری ئەوەی تیرەکە بکەوێتە ناو بازنەی $x^2+y^2=25$ چەند؟



56 گەردوون ئارام پلیتیکی بەکارهێنا کونێکی بچووکی تێدا بوو تیشکی خۆری پێدا دەڕۆیشت بۆ بینینی ڕۆژگیران. شاشەیەکی سپی لە دووری 50cm لە کۆنەکەوە دانا. وێنەی خۆرەکەی دەستکەوت کە تیرەکەی x mm تیری وێنەی خۆرەکە چەند دەبێت ئەگەر ئارام شاشەکە دابنێ لە دووری 100cm؟ 25cm؟ 45cm؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

بە هۆی شیکارکردنی پرسیارەکانی 57 تا 59 دەیسەلمێنین کە ئەو چێوەگۆشەیەی لە نیوەی بازنەیەکدا کێشراوە گۆشە وەستاوە، وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە.



57 هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی r ، بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوەی کە پۆتانی خاڵێک m لە خاڵەکان بریتییە لە $\left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$.

58 لاری هەریەک لە دوو ڕاستەهێڵی MA ، MB بدۆزەوە.

59 بیسەلمێنە کە چێوەگۆشە وەستاوە (لە بیرت بێت: ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان یەکسانە بە __ ? __؟

بەش پڕۆژەی

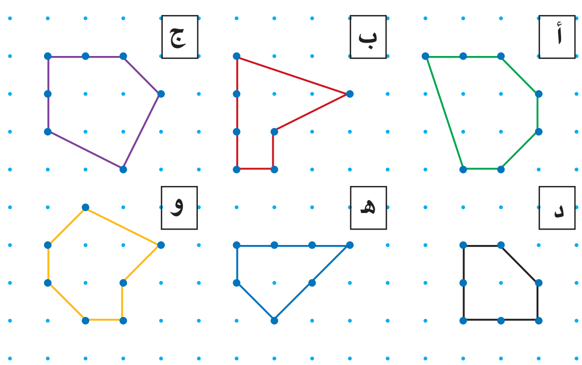
بیركاری سەرسامكەر

ئەم پڕۆژەیە هانت دەدات بۆ گەیشتن بە ڕێسایەك كە یارمەتیت دەدات ڕووبەری چەند لایەكی كێشراو لە سەر كاغەزێكی خاڵدار (بیانی) بدۆزیتەوە. بە دانانی ئەوەی كە هەموو سەرەكانی چەندلاكە دەكەونە سەر خاڵەكانی كاغەزەكە. لە دوایدا سەرسام دەبێت بەبوونی تەنها ڕێسایەك كە دەگونجێت بۆ هەموو چەندلایەك. لەدوایدا كارەكە ئەنجام بدە بەكاری هەرەوەزی لەگەڵ برادەرەكانت لە گرووپی كاركردندا. باشتروایە كارەكە لە نێوان خۆتاندا دابەش بكەن.

چالاكی 1

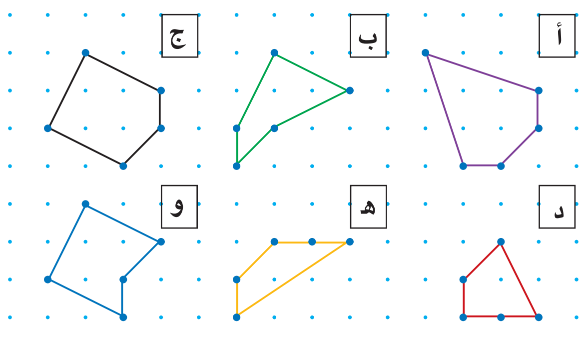
ڕووبەری هەریەك لەم چەندلایەنەی خوارەوە بدۆزەوە. هەستە بەم كارە بە درووستكردنی خشتەكە و تەواوكردنی. N_b هێمایەكە بۆ ئەو خاڵانەی كە دەكەونە سەر چێوەی چەندلایەك N_i هێمایەكە بۆ ئەو خاڵانەی كە دەكەونە ناو چەندلایەكە A هێمایەكە بۆ ڕووبەری چەندلایەكە.

كۆمەڵەی یەكەم



كۆمەڵەی یەكەم			
	N_b	N_i	A
(أ)	7	4	6.5
(ب)			
(جـ)			
(د)			
(هـ)			
(و)			

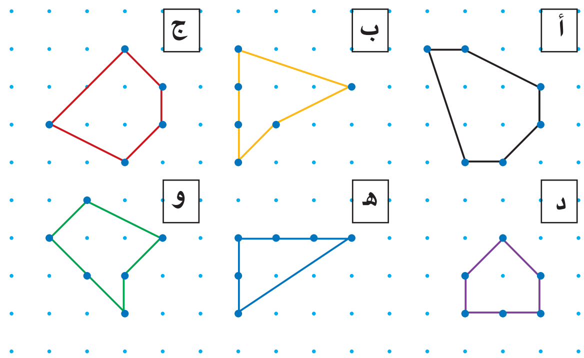
كۆمەڵەی دووەم



كۆمەڵەی دووەم			
	N_b	N_i	A
(أ)			
(ب)			
(جـ)			
(د)			
(هـ)			
(و)			

کۆمەڵەی سێیەم			
A	N_i	N_b	
			(أ)
			(ب)
			(جـ)
			(د)
			(هـ)
			(و)

کۆمەڵەی سێیەم



چالاکی 2

بۆ دۆزینەوەی یاسایەك پاسادانی ئەوە بکە کە ژمارەی هەموو ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر چێوەی هەموو چەندلاکان هەمان ژمارەیە.

1 ئەو شێوازە چیە کە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی رووبەرەکە؟

2 ئەو شێوازە بنووسە، کە دۆزیوتەوە، بە شێوەی یاسایەك.

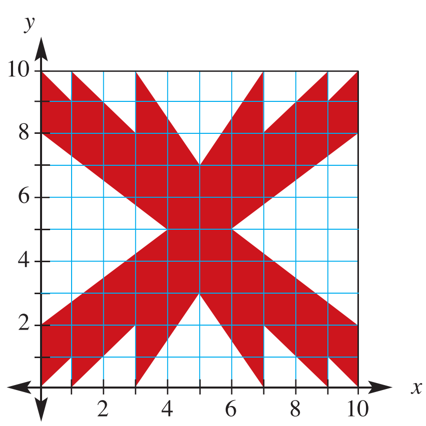
3 ئەو یاسایەی نوسیووتە پاسادان بکە بە رێگای کێشانی ژمارەیەك چەندلا لەسەر کاغەزی خاڵدار (بەیانی) و هەژمێری رووبەرەکانیان بکە.

تۆ یەکەم کەس نیت ئەو یاسایە بدۆزیتەوە. پێش تۆ زانا جۆرج پێك ساڵی 1899ز دۆزیویەتیەوە.

چالاکی 3

شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە

بەشێوەی رەمەکی ئەگەر خاڵێك لەسەر کاغەزی بەیانی هەڵبژێری ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە لە خاڵە رەنگکراوەکان بێت چەندە؟



7

پێداچوونەوەی بەش

ئەم بۆشاییانەی خوارەوە بە دەستەواژەی گونجاو پڕبکەوە.

1 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێکدێت لەیەک ___؟___

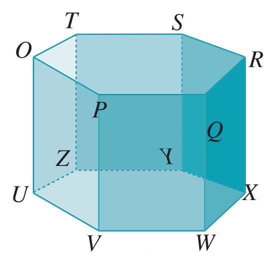
2 یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت پێکدێت لەیەک ___؟___

3 بە دوو خاڵی جیاوازدا تەنها یەک ___؟___ دەڕوات.

4 بەسێ خاڵ کە لەڕێکی یەکترنەبن تەنها یەک ___؟___ دەڕوات.

5 ئەگەر دوو خاڵی جیاواز بکەونە ڕووتەختێك، ئەوا ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵە دادەڕوات ___؟___

ئەو پوازکە وەستاوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 6 بۆ 9 .



6 دوو ڕووی تەریب ناوبنێ

7 دوو ڕووی ئەستون ناوبنێ

8 دوو لای تەکولۆ ناوبنێ

9 لایەك و ڕوویەکی ئەستون ناوبنێ

10 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوە بکەوێتە لای ڕاستی پوازکەکە.

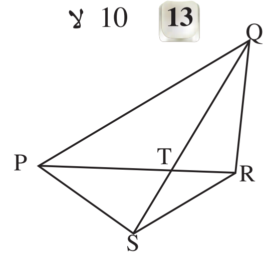
11 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوەی لە پشت پوازکەکە بێت

ناوی ئەم چەندلایانە چیە؟

12 8 لا

13 10 لا

14 12 لا



شێوەکەی سەرەوە بەکاربهێنە کاتێك:

$\widehat{PRQ}=90^\circ$ $\widehat{PTQ}=125^\circ$ $\widehat{RQR}=57^\circ$

$\widehat{PSQ}=83^\circ$ $\widehat{RSQ}=30^\circ$

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 15 تا 18 ، پێوانەی گۆشەکانی هەرسێگۆشەیەك دیاریبکە.

15 سێگۆشەی RST

16 سێگۆشەی PST

17 سێگۆشەی PQR

18 سێگۆشەی PQT

19 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی هەشت لایەك چەندە؟

20 پێوانەی چەقە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

21 پێوانەی گۆشەیەکی ناوەوە لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

22 پێوانەی دەرە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

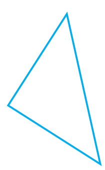
وێنەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە دوو سەرەکانی دوو خاڵی $(-2, 1)$ و $(3, 4)$ بن دیاریبکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی.

23 3

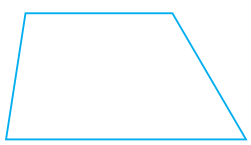
24 -1

شێوەکە دروستبکەوە و وێنەکەی بکێشە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی دیاریکراوە و ڕێژەکەی n ە:

25 $n=3$



26 $n=\frac{1}{2}$



وێنەی ئەم بازنانەی خوارەوە لە ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.

27 $x^2+y^2=49$

28 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

29 چەقی ئەم بازنەیە $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ ؟

هاوکێشەی ئەم بازنەیە بدۆزەرەوە کە چەقەکەیان M و نیوەتیرەکەیان r بێت.

30 $M(0,0)$ ؛ $r=1$

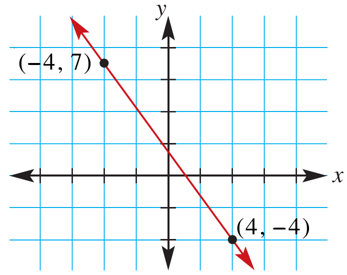
31 $M(6,-2)$ ؛ $r=8$

7 تاقیكردنەوەی بەش

1 كام جووت لە خاڵەكان ڕاستەهێڵێكی ستوون دیاریدەكات لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵەی لە وێنەی خوارەوە كێشراوە ؟

أ $(0, 7)$ و $(8, -4)$ ب $(4, -7)$ و $(-4, 4)$

ج $(-7, 0)$ و $(4, 8)$ د $(7, -4)$ و $(-4, 4)$



2 كام لەم پێوانانەی خوارەوە سێگۆشە دیاری ناكات؟

أ $A=50^\circ$ ؛ $B=85^\circ$ ؛ $C=45^\circ$

ب $AB=12$ ؛ $BC=7$ ؛ $CA=9$

ج $A=90^\circ$ ؛ $B=65^\circ$ ؛ $C=15^\circ$

د $A=18$ ؛ $BC=6$ ؛ $CA=10$

3 كام پێوانەی خوارەوە پێوانەی گۆشەی نۆلایەكی ڕێكە؟

أ 40° ب 100°

ج 140° د 160°

4 ڕۆژان دوو ڕاستەهێڵی كێشا لاری یەكەم = -5 و لاری دووەم = 0.2 بێت ئایا ئەم دوو ڕاستەهێڵە.

أ تەریبن ب ستوونن

ج ئاسۆیی د بێجگە لەوانە

5 جێگۆركێی ئەندازەیی كە خاڵی (x, y) دەگۆڕێت بۆ خاڵی $(-x, -y)$ بریتییە لە:

أ كشانەوە ب وێنەدانەوەی تەوەرەیی

ج خولانەوە د هاوڕێژەی ئەندازەیی

6 بسەلمێنە ئەو چوار لایەی سەرەكانی $A(3, -1)$ $B(9, -5)$ $C=(7, -8)$ $D=(1, -4)$ لاكێشەیە؟

سەرەكانی سێگۆشەیەك بریتییە لە **$(4, 1)$** و **$(2, 2)$** و **$(3, 0)$** پۆتانی سەرەكانی وێنەكەی بەم جێگۆركێیانە دیاریبكە.

7 وێنەدانەوە بە پێی تەوەرەی سینی

8 كشانەوە 3 یەكە بەلای چەپ و یەك یەكە بۆ خوارەوە.

ئەمانە تەواوبكە

9 یەكتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێكدێت لە ___؟

10 یەكتربڕینی دوو ڕووتەخت پێكدێت لە ___؟

11 ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی جیاوازدا لەناو ڕووتەختێكدا دەڕوات ___؟

سێگۆشەی ABC بەكاربهێنە كاتێك $A(-1, 8)$ $B(4, 3)$ $C(1, 2)$ بۆ شیكاری پرسیارەكان لە 12 بۆ 15 .

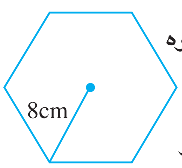
12 لاری هەر لایەك لە لاكانی بدۆزەوە

13 بیسەلمێنە سێگۆشەكە وەستاوە.

14 پۆتانی خاڵەكانی ناوەڕاستی لاكانی بدۆزەوە.

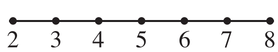
15 درێژی لاكانی بدۆزەوە هەموو وەڵامەكانت نزیكبكەوە لە نزیكترین بەش لە سەد.

16 ڕووبەری چەند لای بەرامبەر بدۆزەوە



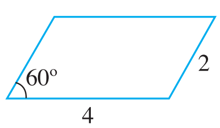
17 پۆتانی وێنەی خاڵی$(3, 3)$ بە خولانەوە چەقەكەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەكەی 45° بدۆزەوە؟

18 ئاوات لە سەر ئەم پارچە ڕاستەهێڵەی خوارەوە بەشێوەیەكی هەڕەمەكی خاڵێكی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە بكەوێتە نێوان 2 و2,5بێت چەندە.



19 پێوانەی چەقە گۆشە لە سێزدەلایەكی ڕێك بدۆزەوە؟

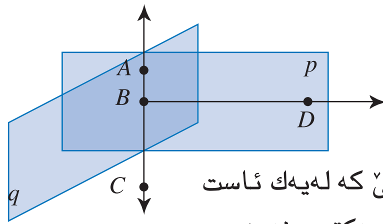
20 ڕووبەری ئەم لاتەریبە بدۆزەوە؟



7

تاقیکردنەوەی کەڵکەبوو

ئەم وێنەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 1 بۆ 9 .



1 یەکتربڕینی هەردوو ڕووتەختی p و q ناوبنێ

2 سێ خاڵ کە لەڕێکی یەکتری بن ناوبنێ

3 سێ خاڵ ناوبنێ کە لەیەك ئاست دابن و لە ڕێکی یەکتری نەبن

4 سێ پارچە ڕاستەهێڵ ناوبنێ.

5 تیشکێك ناوبنێ.

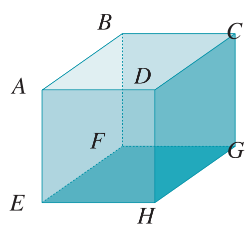
6 دووگۆشەی تەواوکەری یەکتری دیاریبکە.

7 ڕاستەهێڵێك دیاریبکە کە بکەوێتە ڕووتەختی p

8 ڕاستەهێڵێك دیاریبکە نەکەوێتە ڕووتەختی q

9 ڕووتەختی p بە ڕێگایەکی تر ناوبنێ.

ئەم شێوەیەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 10 بۆ 17



10 جووتێك لە ڕووەکانی تەریب بەیەکتر ناوبنێ

11 دوو لای تەکولۆ ناو بنێ

12 لایەك و ڕوویەك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە ئەستوون بێت لەگەڵ ڕووەکە.

13 لایەك وڕووێك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە تەریب بێت بەڕووەکە.

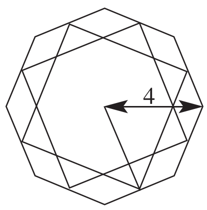
14 دووتۆی گۆشەیەك ناو بنێ وپێوانەکەی دیاریبکە

15 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە یەك خاڵی پوکانەوەی هەبێت بۆ خشتەکێك ئەگەر بزانی خاڵە پوکانەوەکە بکەوێتە پشت خشتەکەکە.

16 وێنەیەکی بینراو دروست بکە دوو خاڵی پوکانەوەی بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر بزانی ئاسۆ دەکەوێتە پشت خشتەکەکەوە.

17 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە دوو خاڵی پوکانەوە بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر بزانی ئاسۆبکەوێتە پێش خشتەکەکە.

وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 18 بۆ 21 .



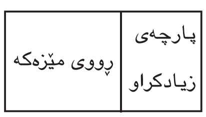
18 ژمارەی چەندلا ڕێکەکان لە شێوەی بەرامبەر چەندە؟ جۆری هەر شێوەیەك دیاربکە.

19 بۆ هەر چەندلایەکی ڕێك کە دۆزیتەوە لەپرسیارەکەی پێشوو پێوانەکانی گۆشەی ناوەوە و چەقە گۆشە و گۆشەکانی دەرەوە دیارییکە؟

20 ئەستووندەکی هەشت لاکە بدۆزەرەوە.

21 ڕووبەری ئەو چەند لاڕێکانە بدۆزەوە لەپرسیاری 18 دا.

22 **دیزاین** دارتاشێك هەستا بە گەورەکردنی مێزێکی چوارگۆشە بە زیادکردنی پارچە تەختەیەکی لاکێشەیی بۆ ڕووەکەی. ئایا مێزە تازەکە ڕێکە؟لایەکسانە؟گۆشەکانی یەکسانن؟

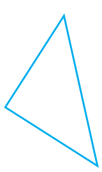


وێنەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە سەرەکانی (1− ,6) (2 ,4−) دیاریبکە؟بەم دوو هاوڕێژە ئەندازەییە.

23 هاوڕێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی = 2−

24 هاوڕێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی = 0.5

25 شێوەی بەرامبەر بکێشە و وێنەی سێگۆشەکە دروستبکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی دراوە و ڕێژەکەی = 2 .



وێنەی هەریەك لەم بازنانە بکێشە کە هاوکێشەکانیان ئەمانەن.

26 $x^2+y^2=36$

27 $x^2+y^2=64$

28 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

هاوکێشەی هەریەك لەم بازنانە بدۆزەوە.

29 چەقەکەی خاڵی بنەڕەتەو نت = 2

30 چەقەکەی خاڵی (5− ,1) وە نت = 4

بەشی هەشتەم

سێگۆشەزانی
Trigonometry

1. شیکاری سێگۆشەی وەستاو.
2. گۆشەکانی خولانەوە.
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە.
4. هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پڕۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 8

سێگۆشەزانی Trigonometry



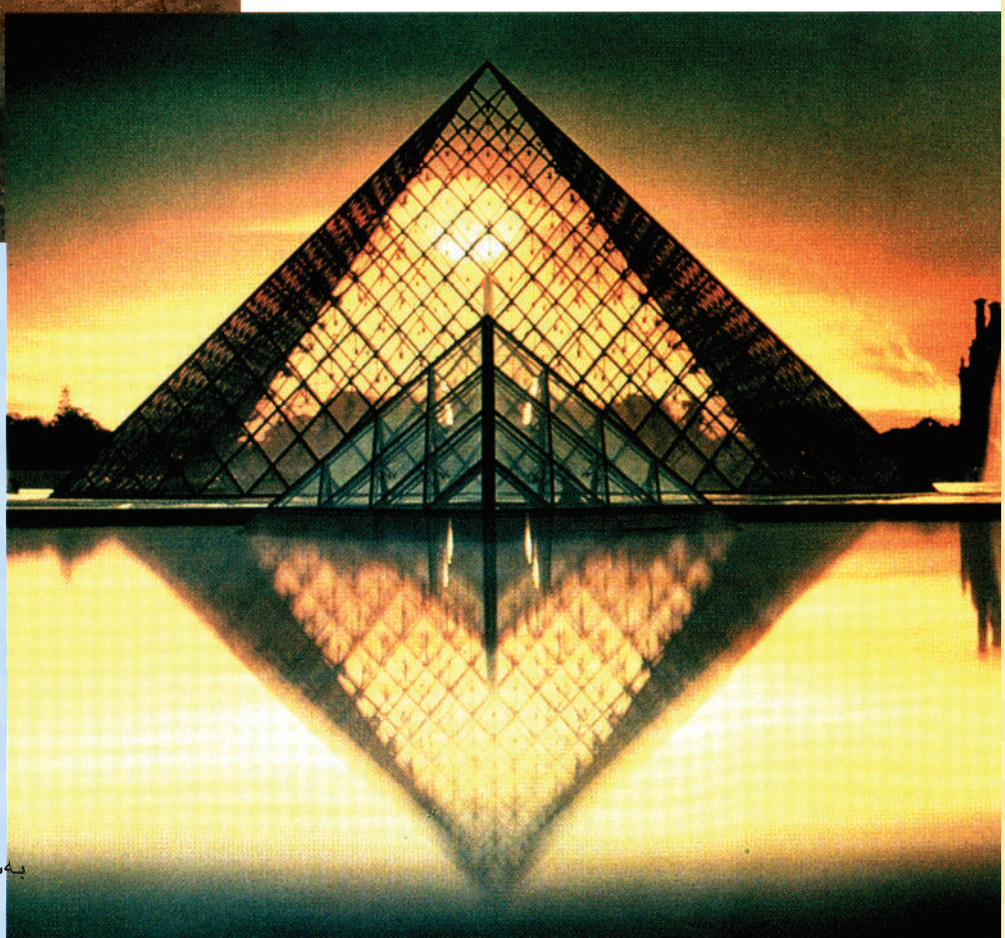
له نێوان پێوانەکانی لاکانی سێگۆشه و گۆشەکانی پەیوەندی گرنگ هەیه که زانستێکی کۆن نویێ لێیدەکۆڵێتەوە ئەویش سێگۆشەزانییە.

له دێر زەمانەوە مرۆڤ گرنگی داوه به سێگۆشەکان. لەم دوو لاپەڕە وێنەکان ئاماژه بۆ ئەوە دەکەن. سێگۆشەزانی بەکارهێنانەکانی زۆرفراوانه له فیزیا و زانستی گەردوون و تەلارسازی و ئەندازە و ئەوانی تر.

وانەکان

1. شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو.
2. گۆشەکانی خولانەوە
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە.
4. هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پڕۆژەی بەش



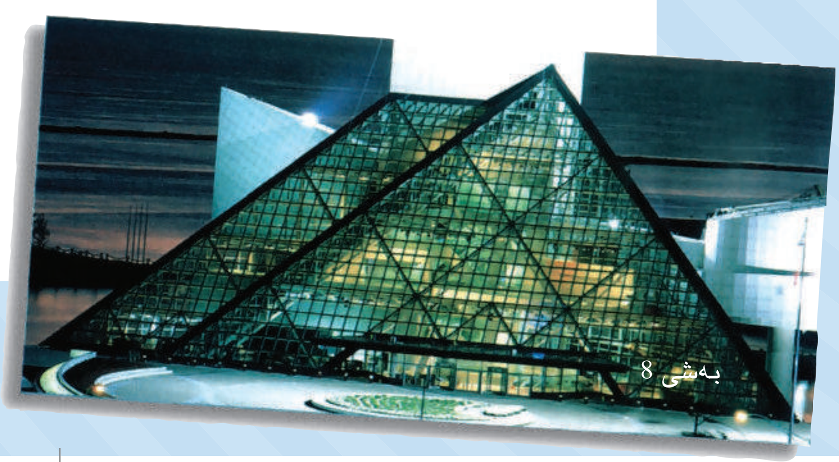


دەربارەی پرۆژەی بەش

بەبۆنەی کردنەوەی پێشانگای جیهانی لە شاری شیکاغۆی ئەمریکی ساڵی 1893 ، جۆرج فیریس چەرخێکی گەورەی دروستکرد، کە بە ناوی خۆیەوە ناسراوە، چەرخەکە خانەخانە کراوە، هەر خانەیەك جێگای چەند کەسێکی لێدەبێتەوە، بە خولانەوەی دۆڵابەکە «چەرخەکە» ئەو نەفەرانەی دەگواستەوە لە خوارەوە بۆ سەرەوە و بە پێچەوانەوە. لە ماوەی کارکردنت لە بەشەکە، هەڵدەستیت بە پێشخستنی ئەم سامپڵە (نموونە) بۆ لێکۆڵینەوەی گۆڕانی بەرزبوونەوەی نەفەرەکەی خانەکە بە تێپەڕبوونی کات.

دوای تەواوبوونت لە بەشەکە دەتوانیت:

- سامپڵێکی بیرکاریانە دابنێیت بۆ بەرزی خاڵێك کە دەکەوێتە سەر چێوەی چەرخەکە بەپێی کات.
- ڕوونکردنەوەی هەر پێکهینەرێك لەپێکهێنەرەکانی سامپڵەکە چی دەگەیەنێ لەژیانی ڕۆژانە.
- دیاریکردنی خێرایی خاڵێك لەسەر چیوەی چەرخەکە.



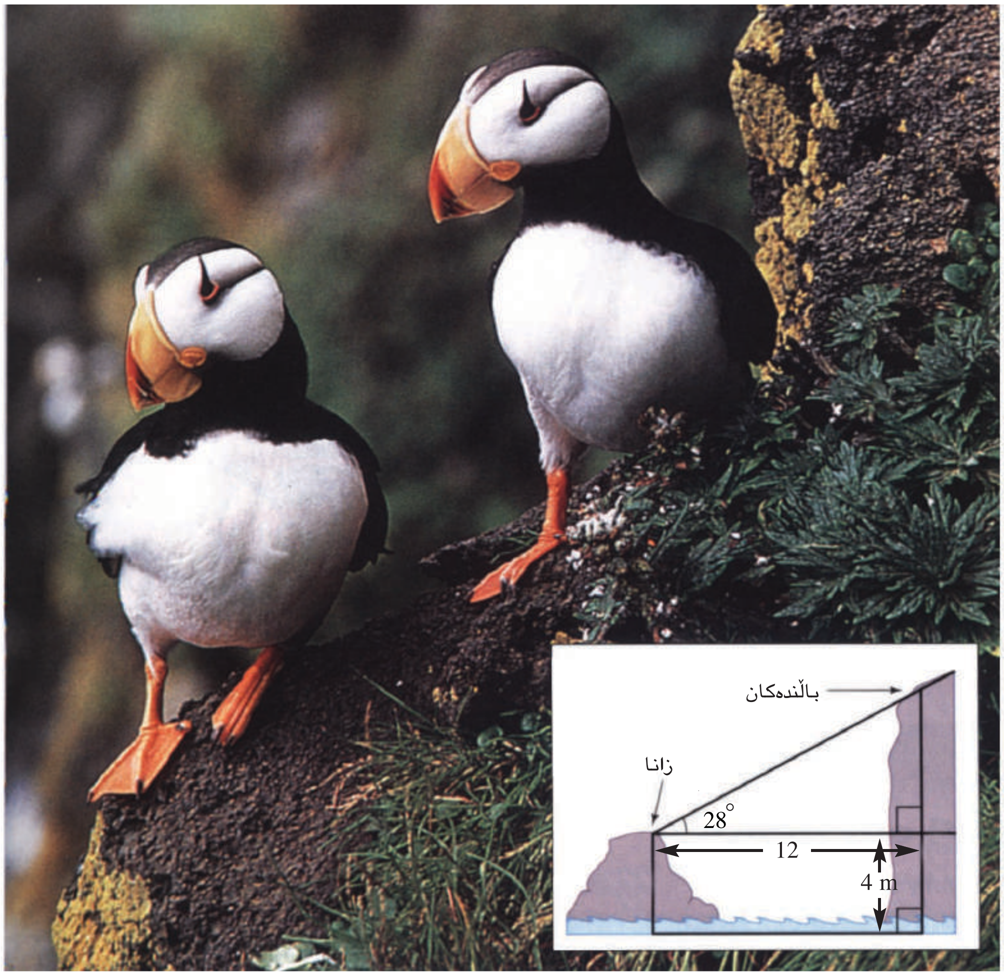
وانەی
1

ئامانجەکان

- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی تیژ هەژماردەکات و جیا دەکاتەوە.
- سێگۆشەی وەستاو بەبەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان شیکاردەکات.

شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو

Solving Right Triangle



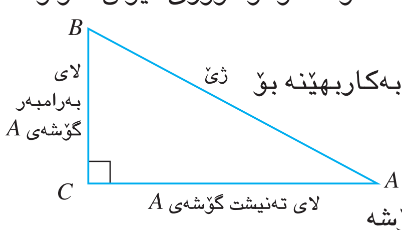
بۆچی؟

دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکانی سێگۆشەیەکی وەستاو بەکاربهێنێت بۆ شیکاری ئەو پرسیارانەی لە ژیانی ڕۆژانەدا دێتە ڕێگامان وەک لە دیاریکردنی بەرزی ئەو باڵندانەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون لە ڕووی ئاوەکەوە.

جێبەجێکردنەکان

باڵندەکان

یەکێك لە زاناکان هەستا بەگرتنی وێنەی کۆمەڵە باڵندەیەك لەقەدپاڵی شاخێکدا وەستابوون. بۆ دۆزینەوەی بەرزی ئەو باڵندانە لە ڕووی ئاوەکەوە. زاناکە هەستا بە پێوانی ئەو گۆشەی دروست بووە لە ئەنجامی هێڵی سەیرکردنی بۆ بلندەکان لەگەڵ هێڵی ئاسۆیی، بینی پێوانەی گۆشەکە 28^{o} زاناکە چۆن ئەم کارەی ئەنجامدا.ئەگەر بزانیت ئەو لە بەرزی 4 m وەستاوە و دووری نێوان ئەو و قەدپاڵی شاخەکە 12m بووە؟



بۆ ئەوەی بەرزی شوێنی باڵندەکان دیاریبکەیت سێگۆشەزانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشە وەستاوەکە یان درێژی لایەك لە لاکانی.

بیربکەوە کە ژێی سێگۆشەی وەستاو ئەولایەیە کە بەرامبەر گۆشە وەستاوەکەیە. لەو سێگۆشەی لە لای چەپ کێشراوە، دەبینین $\overline{AB}$ ژێیەو و $\overline{AC}$ **تەنیشت گۆشەی** A و $\overline{BC}$ لای بەرامبەری گۆشەی A .

لای تەنیشت و بەرامبەری گۆشەی B دیاریبکە.

خاڵی چاودێری ✓

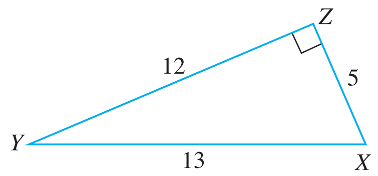
Trigonometric Ratios $\hat{A}$ ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\hat{A}$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}} \qquad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$$

سەرنج بدە: sin A = sine A , cos A = cosine A , tan A = tangent A

نموونــــــــە 1

هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی X لەسێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.



شیکار

$\sin \hat{X} = \frac{YZ}{XY} = \frac{12}{13} = 0.9231$

$\cos \hat{X} = \frac{XZ}{XY} = \frac{5}{13} = 0.3846$

$\tan \hat{X} = \frac{YZ}{XZ} = \frac{12}{5} = 2.4$

هەوڵبدە هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی Y لە سێگۆشەکەی سەرەوە هەژماربکە وەڵامی تەواوی بدەوە وەڵامەکانت لە نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەرەوە.

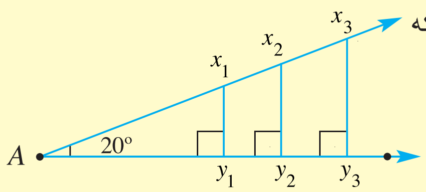
چالاکی

دۆزینەوەی ڕێژەی سێگۆشەکان Explrering Trigonometric Ratios

پێویستیت بە پرگالێك و ڕاستەیەك و بژمێرێك هەیە.

خشتەیەك دروستبکە وەك خشتەکەی خوارەوە.

1. ئەوەی لە خشتەکەدایە بینووسەوە. لەدوایدا تەواویبکە لە ڕێگای پێوانی لایە دیاریکراوەکان لەگەڵ دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A .



2. ئایا ئەو بەهایانەی نووسیوتە لە ستونی $\sin A$ بە نزیکەیی یەکسانن؟ کارەکە لە ستونی $\cos A$ وایە؟ لەستوونی $\tan A$ وایە؟

سێگۆشە	بەرامبەر $\hat{A}$	تەنیشت $\hat{A}$	ژێ	$\sin\hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$	$\cos\hat{A} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$	$\tan\hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$
Ax_1y_1						
Ax_2y_2						
Ax_3y_3						

3. ئەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە بەراوردی بکە لەگەڵ ئەنجامەکانی هاوڕێکانت لە پۆلەکەدا.

4. ئایا دەتوانیت گریمانەیەك دابڕێژیت دەربارەی هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A ؟

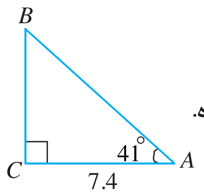
خاڵی چاودێری ✓

بەهاکانی ڕێژەی سێگۆشەیی گۆشەیەکی تیژ ناگۆڕێت بە گۆڕانی سێگۆشە وەستاوە بەکارهاتووەکە، هەروەك لە چالاکی سەرەوە بۆت دەرکەوت، بەهاکانی ئەم ڕێژانە تەنها بە پێوانەی گۆشەکە دیاری دەکرێت.

دەتوانیت بەهاکانی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەکەت دەست بکەوێت بەزانینی پێوانەکەی بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی. و دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی هەندێك لە لاکانی سێگۆشەی وەستاو هەروەك نموونەی 2 ڕوونیدەکاتەوە.

نموونە 2

درێژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.



شیکار

لە بەر ئەوەی درێژی AC زانراوە پێویستە درێژی هەریەك لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ بدۆزینەوە.

$\cos A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی AB

$\tan A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی BC

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

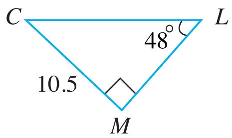
$$\cos 41^\circ = \frac{7.4}{AB} \qquad \tan 41^\circ = \frac{BC}{7.4}$$

$$AB = \frac{7.4}{cos 41^\circ} \qquad BC = 7.4 \times \tan 41^\circ$$

$$BC \approx 7.4 \times 0.8693$$

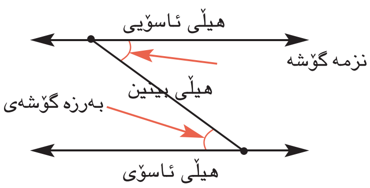
$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8 \qquad BC \approx 6.4$$

هەوڵبدە درێژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە



بەرزە گۆشە Angle of Elevation ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی بەرزتر لە خۆی.

نزمە گۆشە Angle of Depression ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی نزمتر لە خۆی.



نموونە 3

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە سەرەتایی وانەکە.بەرزی شوێنی باڵندەکان لە سەر ڕووی ئاوەکە بدۆزەرەوە.

جێبەجێکردنەکان

باڵندەکان

شیکار

$\overline{BE}$ بەرزی شوێنی باڵندەکانە لەڕووی ئاوەکەوە.

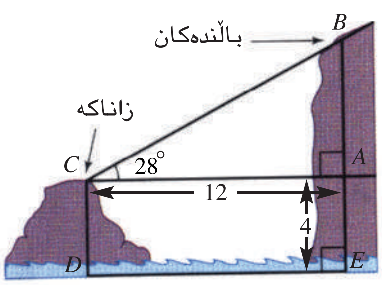
لەبەرئەوەی $BE = BA + AE$

وە لەبەر ئەوەی $AE = CD = 4m$ ، کەواتە $\tan 28^\circ = \frac{AB}{12}$

$$AB = 12 \times \tan 28^\circ$$

$$AB \approx 6.38^\circ$$

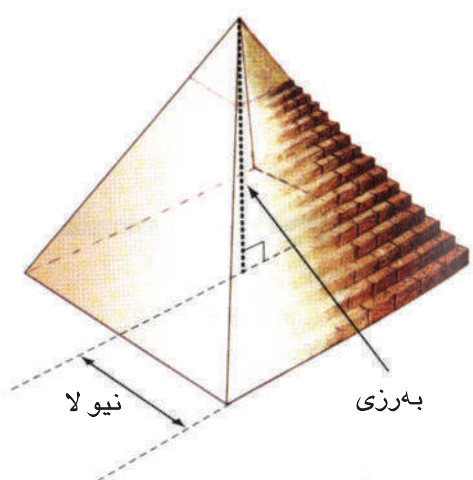
$$BE = BA + AE = 6.38 + 4 = 10.38m$$



دەروازەیەك لەسەر ڕۆشنبیری فیرعەونییەکان فیرعەونییەکان پەیوەندیەکی سێگۆشەیەیان بەکارهێناوە ناویان ناوە سیکد کە لاری ڕووی هەرەمەکە دەگەیەنێت.

$$\text{سیکد Cotangent} = \frac{\text{دوو ئەوەندەی پێوانی لای بنکەی هەرەم}}{\text{7 ئەوەندەی بەرزی هەرەمەکە}}$$

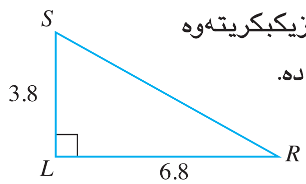
تێبینی ئەوە بکە کە سیکد هەڵگەڕاوەی سایەی (هەڵگەڕاوەی tan) گۆشەکەیە کە پێی دەوترێت سایەتەواوی گۆشەکە Cotangent یان cot گۆشەکە بەکورتکراوەیی.



جێبەجێکردنەکان
ئەندازە

ئەگەر بمانەوێت سێگۆشەیەکی وەستاو شیکاربکەین پێویستە پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکە بدۆزینەوە لەگەڵ درێژی لا نەزانراوەکانی سێگۆشەکە. لە کارەکەتدا بژمێری زانستی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی پێوانەی ئەو گۆشەی کەیەکێك لە ڕێژە سێگۆشەیەکانی دەزانیت. ئەو ڕاستییە بەکاربهێنە کە: کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشەکە دەکاتە180^{o} واتە کۆی هەردوو گۆشە تیژەکە لە سێگۆشە وەستاوەکە 90^{o}.

نموونە 4



سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی کە نزیکبکریتەوە لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەیتەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.

ئەگەر زانیت $\tan 28 = 0.55$

شیکار

1. $\tan R = \frac{3.8}{6.8}$

$R = \tan^{-1}\frac{3.8}{6.8} \approx 29^{\circ}$

2. لەبەرئەوەی کۆی پێوانەی دوو گۆشە تیژەکە90° ئەوا $90^{\circ} - 29^{\circ} = 61^{\circ}$

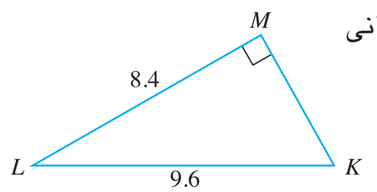
3. بیردۆزی فیثاگۆرس بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی ژێیەکە.

$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$

$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$

$RS \approx 7.8$

هەوڵبدە



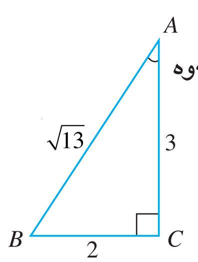
سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی بە نزیککردنەوەی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکەی بۆ نزیکترین بەش لە دە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

1. چۆن سێگۆشەکە شیکاردەکەیت لە نموونەی 4 بە دەستپێکردن بە دۆزینەوەی ژێیەکەی، لە دوایدا بەبەکارهینانی cos یان sin بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکان؟
2. لە دوای دۆزینەوەی پێوانەیR° ئایا دەتوانی درێژی ژێیەکە بدۆزیتەوە بەبێ بەکارهێنانی بیردۆزی فیثاگۆرس؟

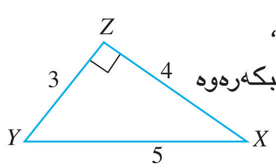
ڕاهێنـــــــــان

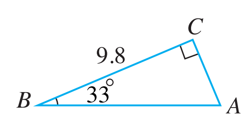
بەردەوامبوون لە بیر کاریدا



1. چۆن ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی A لە سێگۆشەی بەرامبەر دەدۆزێتەوە
2. چۆن پێوانەی دووگۆشەی A و B لە سێگۆشەی بەرامبەر دیاریدەکەیت.
3. جیاوازی نێوان $\sin^{-1} A$ و $\frac{1}{\sin A}$ چییە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



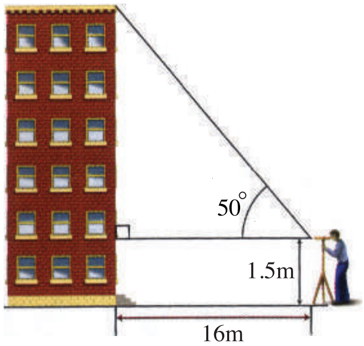


4. ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی X لە سێگۆشەی لای چەپ بدۆزەرەوە، وەڵامەکەت بە تەواوی بدەرەوە، بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکیبکەرەوە
5. درێژی هەردوو لای AC و BA لە سێگۆشەی لای ڕاست بدۆزەرەوە.

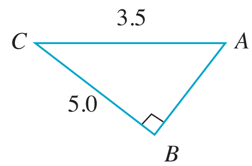
جێبەجێکردنەکان



6 **ئەندازە** ئەندازیاریك لە دووری m16 لە تەلاریکەوە وەستاوە سەیری بەرزترین خاڵی تەلارەکەی دەکرد بە دووربینێك لەبەرزی 1.5 m لەزەویەوە دانرابوو بەرزی تەلارەکە چەند ئەگەر پێوانەی بەرزە گۆشەکە 50° بێت؟



7 ئەم سێگۆشەیەی خوارەوە شیکاربکە. پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لای AB بەنزیکی بۆ نزیکترین دە.



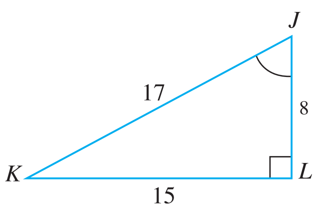
ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سێگۆشەی JKL بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

8 $\sin \hat{K}$ **9** $\sin \hat{J}$

10 $\cos \hat{J}$ **11** $\cos \hat{K}$

12 $\tan \hat{K}$ **13** $\tan \hat{J}$

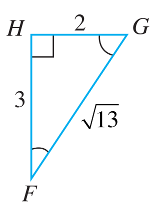


سێگۆشەی FGH بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

14 $\sin \hat{G}$ **15** $\sin \hat{F}$

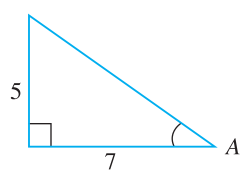
16 $\cos \hat{G}$ **17** $\cos \hat{F}$

18 $\tan \hat{G}$ **19** $\tan \hat{F}$

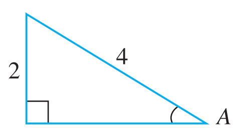


پێوانەی گۆشەی A بەبەکارهێنانی بژمێر (ئەگەر هەبێت) بدۆزەرەوە.

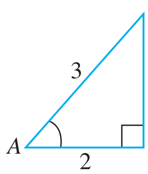
20



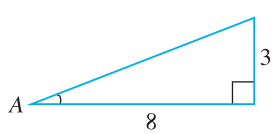
21



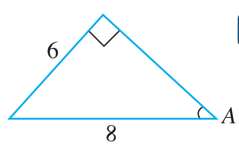
22



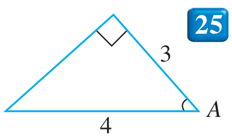
23



24

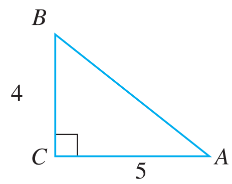


25

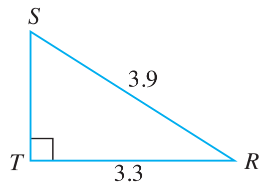


ئەم سێگۆشانە شیکار بکە. پێوانەی گۆشەکە بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکی بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

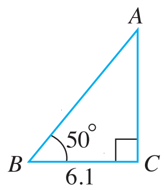
26



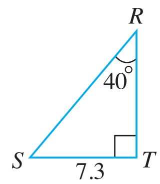
27



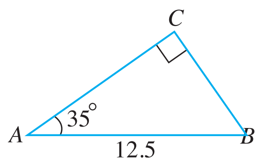
28



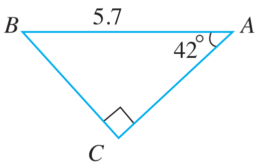
29



30

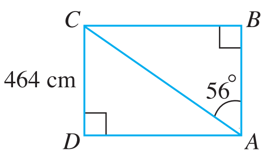


31



32 بسەلمێنە پەیوەندی $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ هەمیشە ڕاستە کاتێك $\cos A \neq 0$

33 ئەندازە درێژی هەریەکە لە لای AD و تیرەی AC لە لاکێشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.



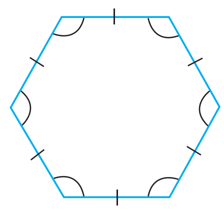
جێبەجێکردنەکان

34 جوانکاری ماڵەکان باوکی گوڵ بەهار ویستی (باڵەکۆنێك) دروستبکات کە شێوەی سێگۆشە وەستاوی هەبێت ویستی ژێی سێگۆشەکە 6m بێت و دوو لای گۆشە وەستاوەکە لە درێژیدا یەکسان بن.

أ درێژی هەریەکە لە دوو لای گۆشە وەستاوەکە بدۆزەرەوە.

ب ڕووبەری باڵەکۆنەکە بدۆزەرەوە.

بەرەنگاری



35 بینا بەڕێوەبەری باخچەی گشتی ویستی هۆڵێك بۆ پشوودان دروست بکات بنکەکەی بە شێوەی شەشلایەکی ڕێك بێت و درێژی لایەکی 10 m بێت، ئەگەر تێچوونی دارشتنی بنکەکە 170 هەزار دینار بێت بۆ هەر مەترە چوارگۆشەیەك. ڕێژە سێگۆشەیەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بڕی تێچوونی دارشتنی بنکەکە.



ڕوانینێك بۆ دواوە

پلەی هەریەك لەم زۆر ڕادەدارانە دیاریبکە.

36 $3x^2 - 5x^8 + 4x^3 + 2$

37 $(x^2 - 9)(x^3 + 4)$

شیتەڵ بکە

38 $2x^3 - 18x$

39 $3x^3 - 7x^2 + 2x$

هەریەك لەم برانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە، دوای ڕێژەکردنی ژێرە.

40 $\frac{3}{\sqrt{2}}$

41 $\frac{1}{\sqrt{3}}$

42 $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$

43 $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ناوەندە ژمێرەیی هەریەکە لەم بەهایانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە دوایدا لادانی پێوانەکەیان بدۆزەرەوە

44 110; 119; 125; 130; 78; 100; 113; 121; 103; 99; 122; 107; 102

45 22; 26; 28; 17; 19; 24; 36; 25; 14; 17; 46; 53; 25; 18; 34; 12

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

46 **ئەندازە** ئەگەر خاڵێك بخولێتەوە بە دەوری چەقی خولانەوە 360°، ئەوا ڕێڕەوەکەی بازنەیەکی تەواو دەبێت. ئەو گۆشە خولانەوە بدۆزەرەوە کەوا لە ڕێڕەوی خاڵەکە دەکات ببێتە نیوە بازنەیەك؟ چارەکە بازنەیەك؟

گۆشەکانی خولانەوە Angles of Rotation

وانەی 2

ئامانجەکان

- گۆشەی گەڕانەوە بۆ گۆشەیەك دیاریدەکات.
- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەك لە باری پێوانەییدا دیاریدەکات.

جێبەجێکردنەکان

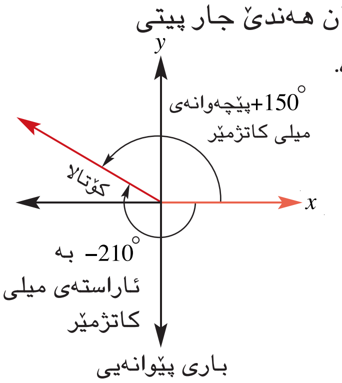
فڕۆکەوانی



بۆچی؟ دەتوانیت گۆشەکانی خولانەوە بەکاربهێنیت بۆ باسکردنی تێکڕای خولانەوەی بزوێنەری فڕۆکەیەکی پەروانەدار.

پەروانەی یەکێك لە فڕۆکەکان 1100 خول دەخولێتەوە لە خولەکێکدا، ئەو خاڵەی لەسەر پەروانەی فڕۆکەکەیە چەند پلە دەخولێتەوە لە چرکەیەکدا؟

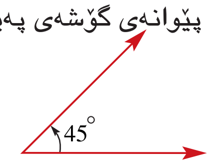
ئەگەر پێناسەی گۆشە لە ئەندازەدا بریتی بێت لەو شێوەی کە دروست دەبێت لە ئەنجامی بەیەکگەیشتنی دوو تیشك هاوبەشبن لە خاڵی بنەڕەتدا. ئەوا پێناسەکەی لە سێگۆشەزانیدا بریتییە لە **خولانەوەی تیشکێك** بەدەوری خاڵی بنەڕەتدا لە شوێنێکەوە بۆ شوێنێکی تر. هەر شوێنێکی تیشکەکە کە دەخولێتەوە لەگەڵ شوێنی دەستپێکردنی گۆشەکە، گۆشەیەك دیاریدەکات پێی دەوترێت گۆشەی خولانەوە. **Angle of Rotation** بیرکاریزانەکان هەندێ جار پیتی یۆنانی «θ ثیتا» بەکاردەهێنین بۆ ناولێنانی گۆشەی خولانەوە.



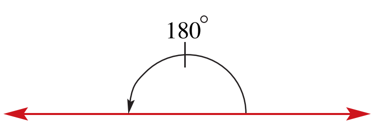
جێگای دەستپێکردنی تیشکەکە پێی دەوترێت **لای یەکەمی** گۆشەو **Initial side** شوێنی وەستانەکەی پێی دەوترێت کۆتالا **Terminal side**. گۆشەکە لە باری پێوانەییدا دەبێت کاتێك سەرەکەی لە خاڵی بنەڕەتدا دەبێت لە ڕووتەختی پۆتاندا و لای یەکەمی دەکەوێتە سەر نیوەی موجەب لە تەوەرەی سینی.

ئەگەر خولانەوەکە بە ئاڕاستەی پێچەوانەی جولانەوەی میلی کاتژمێر ڕویدا ئەوا پێوانەی گۆشەکە **موجەب Positive** دەبێت. وپێوانەی گۆشەکە **سالب Negative** دەبێت ئەگەر خولانەوەکە بە ئاڕاستەی جولانەوەی میلی کاتژمێر بێت.

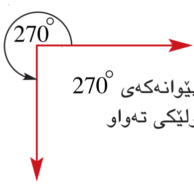
(پلە) دادەنرێت بەگرنگترین پێوانەی گۆشە و ئاماژەی بۆ دەکرێت بەهێمای(°). و لەبەر ئەوەی ئەو گۆشەیەی دەستمان دەکەوێت لە خولێکی تەواوی تیشکەکە دەکاتە 360° ئەوا پلە پێناسە دەکرێت بەوەی پێوانەی گۆشەی پەیدابوو لە خولانەوەی تیشکەکە لە $\frac{1}{360}$ لە خولێکی تەواو.



گۆشەیەك کە پێوانەکەی 45° دەکاتە $\frac{1}{8}$ خولێکی تەواو



گۆشەیەك کە پێوانەکەی 180° دەکاتە $\frac{1}{2}$ خولێکی تەواو



گۆشەیەك کە پێوانەکەی 270° دەکاتە $\frac{3}{4}$ خولێکی تەواو

خاڵی چاودێری ✓

ئاراستەی خولانەوەیەك كە گۆشەكەی -90^{o} و 120^{o} چییە؟ ئەو بەشەی كە هەریەكە لەم دوو خولانەوەیە لە خولێكی تەواو پێكیدێنێت چەندە؟

نموونە 1



بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەكەی سەرەتای وانەكە.
خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆكەیە لە چركەیەكدا چەند پلە دەخولێنەوە.

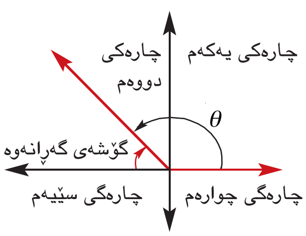
شیكار

پەروانەكە 1100 خول لە خولەكێكدا دەسوڕێتەوە، لەبەر ئەوە خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە $1100 \times 360^{o} = 397000^{o}$ دەخولێتەوە لە خولەكێكدا. و بەم شێوەیە خولانەوەی خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە لەیەك چركەدا $\frac{396000^{\circ}}{60} = 6600^{\circ}$

هەوڵبدە پەیكەكانی مۆسیقا 33.3 خول لە خولەكێكدا دەخولێنەوە. خاڵێك لەسەر پەیكەكە لە یەك چركەدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

لەوانەی سێیەمدا فێردەبێت چۆن هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەكانی گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بكەیت. كاتێك پێوانەكەی لە 90° زیاتر دەبێت (یان كەمتر دەبێت لە سفر) بۆ ئەوەی بتوانیت ئەمە بكەیت لە مەودوا پێویستت بە دیاریكردنی پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە دەبێت بۆ گۆشەكە لەباری پێوانەییدا.

ئەگەر θ گۆشەیەك بێت لە باری پێوانەییدا ئەوا (گۆشەی گەڕانەوەی) ئەو گۆشە تیژە موجەبەیە كە پێكدێت لە كۆتالا گۆشەكە و بەشێك لە تەوەرەی سینی (موجەب یان سالب) كە نزیكترە لێیەوە. ئەگەر بزانی كە بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی لە هەردوو چارێگی یەكەم و چوارەم دایە. و بەشی سالب لە دوو چارێگی دووەم و سێیەم دایە.



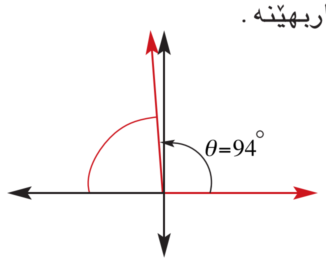
نموونە 2

گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە چەندە!

أ $\theta = 94^{\circ}$	ب $\theta = 245^{\circ}$
ج $\theta = 290^{\circ}$	د $\theta = -110^{\circ}$

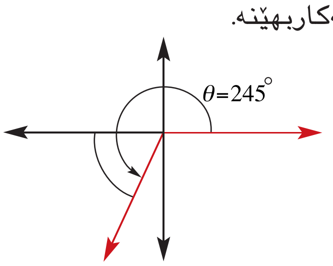
شیكار

أ كۆتالا گۆشەی 94° = θ لە چارێگی دووەم دایە. بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە .



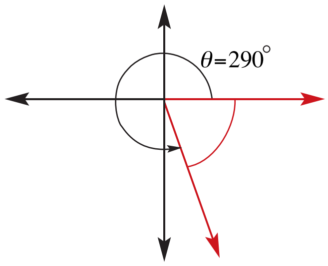
پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $=86^{o}$ $|180^{o}-94^{o}|$

ب كۆتالا گۆشەی $\theta = 245^{\circ}$ لە چارێگی دووەم دایە بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە.



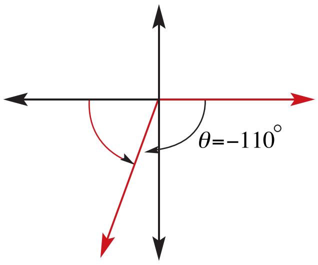
پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $=65^{o}$ $|180^{o}-245^{o}|$

ج | کۆتالا گۆشەی $\theta = 290^{\circ}$ دەکەوێتە چارێگی چوارەم. بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی بەکاربهێنە .



پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $|360^{\circ} - 290^{\circ}| = 70^{\circ}$

د | کۆتالا گۆشەی $\theta = -110^{\circ}$ دەکەوێتە چارێگی سێیەم بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەکاربهێنە.



پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $|180^{\circ}-110^{\circ}| = 70^{\circ}$

هەوڵبدە گۆشەی گەڕانەوە چەندە بۆ گۆشەی $\theta = 315^{\circ}$ و گۆشەی $\theta = -235^{\circ}$ لەباری پێوانەییدا؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ژمارەی ئەو گۆشانەی دەکەونە نێوان 0° و 360° چەندە کە لە هەمان گۆشەیی گەڕانەوەدا بەشداری دەکەن.

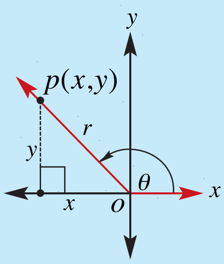
ئەگەر واتدانا کە x و y پۆتانی خاڵێکن لەسەر کۆتالا گۆشەیەك لەباری پێوانەیی. ئەوا لە توانات دەبێت نیشانەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی کە دەگەڕێتەوە بۆ گۆشەیەك دیاریبکەیت.

ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشە θ

ئەگەر $p(x, y)$ خاڵێك بێت لە سەر کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا.
ئەوا دووری نێوان P و خاڵی بنەڕەت لەڕووتەختی پۆتاندا دەکاتە:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad x \neq 0$$



نموونە 3

خاڵی $P(-2, -3)$ دەکەوێتە سەر کۆتالا گۆشەی θ لەباری پێوانەیی. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی بکە

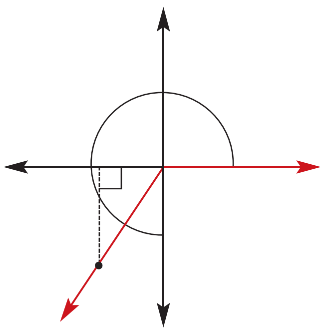
شیکار

وێنەیەکی بۆ بکێشە $x = -2 \quad y = -3$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$



هەوڵبدە خاڵی $P(3, -5)$ دەکەوێتە سەر کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا، هەژمێری ڕێژەی سێگۆشەییەکانی بکە.

چالاکی

دۆزینەوەی نیشانەکانی ڕێژە سێگۆشەییەکان لە چارێگەکانی ڕووتەختی پۆتاندا
Exploring the Sign of Trigonometric Ratios

1. خشتەی بەرامبەر دروستبکە و تەواوی بکە و نیشانەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بۆ گۆشەی θ دیاریبکە لە باری پێوانەییدا. بەپێی ئەو چارێگەی کۆتالا دەکەوێتە ناویەوە.

ڕێژە سێگۆشەیی	چارێکی			
	یەکەم	دووەم	سێیەم	چوارەم
$\sin\theta$	+			
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

2. کۆتالا گۆشەی θ دەکەوێتە کام چارێگەوە، ئەگەر $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ؛ $\cos\theta = -\frac{2}{7}$ ؛ $\tan\theta = -\frac{1}{5}$ هەموو وەڵامەکانی کە لە توانادایە باسبکە.

3. ئایا r (ژێ)کاردەکاتە سەر نیشانەی هەریەك لەڕێژە سێگۆشەییەکان؟هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

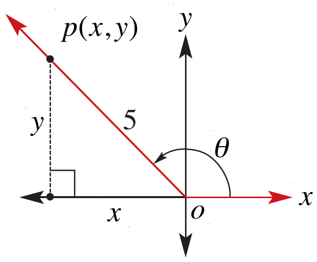
خاڵی چاودێری ✔

4. کام لە دوو گۆڕاوی x یان y نیشانەی $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ دیاریدەکەن؟

ئەگەر زانیت کۆتالا گۆشەی $\boldsymbol{\theta}$ لە باری پێوانەییدا دەکەوێتە کام چارێگەوە و بەهای ڕێژەیەك لە سێ ڕێژە سێگۆشەکانت زانی. دەتوانیت هەژمێرەی دوو ڕیژەکەی تر بکەیت.

نموونە 4

هەژماربکە $\sin\theta$ ، $\tan\theta$ ئەگەر بزانی گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا و کۆتالاکەی دەکەوێتە چارەگی دووەم $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.



شیکار

وێنەکە بکێشە و هەژمێری پۆتانی خاڵی P بکە لەبەرئەوەی $\cos\theta = -\frac{3}{5} < 0$ ئەوا x سالبە کەواتە $x = -3$ و $r = 5$.
بۆ هەژمێرکردنی y بیردۆزی فیثاگۆرس بەکاربهێنە.

$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$y = 4$ $y > 0$ $P(x, y)$ دەکەوێتە چارەگی دووەم

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

هەوڵبدە هەژمێربکە $\cos\theta$ و $\tan\theta$ ئەگەر بزانی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدایە وکۆتالاکەی دەکەوێتە چارەگی سێیەم و $\sin\theta = -\frac{4}{5}$.

ئەگەر کۆتالاکەی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا لەگەڵ تەوەری صادی $(x = 0)$ جووت بێت ئەوا $\tan\theta$ پێناسە نەکراوە.

خاڵی چاودێری ✔ هەژمێرەی ڕێژە سێگۆشییەکانیٚ گۆشەی $\theta = 90^\circ$ بکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 جیاوازی چییە لەنێوان گۆشەکانی سێگۆشەی وەستاو و گۆشەکانی خولانەوە؟

جێبەجێکردن

2 ئەو جیاوازییانەی هەیە لە نێوان ڕێژە سیگۆشەییەکانی گۆشەیەك و ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی گەڕانەوەکەی چییە؟ هۆیەکانی ئەم جیاوازییانە چییە؟

3 ئایا پێویستیت بە زانینی پێوانەی گۆشەیەك هەیە بۆ ئەوەی هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی بکەیت؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.



ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **فڕۆکەوانی** پەروانە گەورەکەی فڕۆکەی هەلیکۆپتەرێك 430 خول لە خولێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆکەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە.

5 گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە 93° ، 280° ، -36° دیاربکە.

6 خاڵی $P(3, -2)$ دەکەوێتە سەر کۆتالای گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی ئەو گۆشەیە بکە.

7 هەژمێری $\cos\theta$ و $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا. و کۆتالاکەی دەکەوێتە چارێگی سێیەم و $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەر گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بکێشە.

8 115° **9** 280° **10** -300° **11** -130°

گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە دیاریبکە.

12 35° **13** 23° **14** 112° **15** 160°

16 612° **17** 478° **18** -135° **19** -315°

20 90° **21** -180° **22** -450° **23** -485°

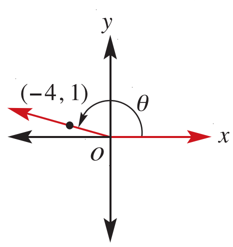
24 540° **25** 270° **26** 225° **27** 195°

28 410° **29** 560° **30** -120° **31** -280°

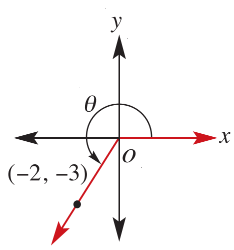
32 -175° **33** -295° **34** -395° **35** -540°

هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی θ بکە.

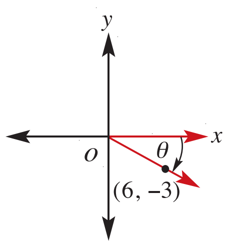
36



37



38



ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی θ هەژمار بکە لە باری پێوانەییدا ئەگەر زانیت ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر کۆتالاکانی.

39 $(3, 4)$ **40** $(5, 2)$ **41** $(-4, 2)$ **42** $(-4, 6)$

43 $(\sqrt{3}, -3)$ **44** $(2\sqrt{5}, -1)$ **45** $(-4, -3)$ **46** $(-1, -8)$

ئەگەر ڕێژەی سێگۆشەیی ئەو چارێکەی کۆتاکەی گۆشەکە بزانیت لەباری پێوانەییدا ئەوا بەهای هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی داواکراو هەژماربکە.

47 چارێکی یەکەم؛ $\cos\theta = 0.25$ ؛ $\tan\theta$

48 چارێکی سێیەم؛ $\cos\theta = -0.50$ ؛ $\tan\theta$

49 چارێکی چوارەم؛ $\tan\theta = -1$ ؛ $\sin\theta$

50 چارێکی یەکەم؛ $\tan\theta = 2$ ؛ $\sin\theta$

51 چارێکی سێیەم؛ $\sin\theta = -0.50$ ؛ $\cos\theta$

52 چارێکی دووەم؛ $\sin\theta = 0.40$ ؛ $\cos\theta$

ژمارەی خولە تەواوەکان یان ئەو بەشانەی کە گۆشەکە دەیانئوێنێت دیاریبکە.ئاڕاستەی خولانەوە دیاریبکە لەگەڵ میلی کاتژمێر یان بە پێچەوانەوە.

53 45° **54** 90° **55** -180° **56** -270

57 450° **58** 720° **59** -420° **60** -640

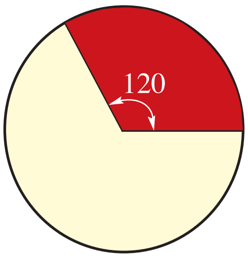
بەرەنگاری

61 هەژمێری $\cos\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\sin\theta = 0.375$ $\tan\theta < 0$

62 هەژمێری $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\cos\theta = 0.809$ $\sin\theta < 0$

بەستنەوە

63 **ئەگەر** ئەگەری ئەوەی ئازاد تیرەکەی بچەقێتە بەشە سورەکەوە چەندە؟



جێبەجێکردن

64 **ئەندازە** پەروانەی یەکێك لە فرۆکەکان 900خول لە خولەکێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر ئەم پەروانەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

65 **دەریاوانی** کاپتنەکانی پاپۆرەکان و فرۆکەکان یەکەیەکی درێژی بەکاردەهێنن کە پێی دەڵێن (میلی دەریایی) بۆ پێوانەی دووریەکە. میلی دەریایی بەنزیکەیی یەکسانە بە درێژی کەوانەیەك لەسەر گۆی زەوی کە دیاریکرابێت بە چەقە گۆشەیەك کە پێوانەکەی یەك خولەك بێت(هەر60 خولەك یەکسانە بە یەك پلە) تیرەی زەوی لەهێڵی کەمەربەند 12756 km کەم بەنزیکەیی.

أ چێوەی زەوی هەژمێربکە لە هێڵی کەمەربەند.

ب چەند خولەك یەکسانە بە چێوەی زەوی؟

ج چەند کیلۆمەتر یەکسانە بە میلی دەریایی؟

ڕوانین بۆ دواوە

66 $x^2 - 8 = 188$ شیکاربکە.

67 چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی 4 کەس لە 10 کەس؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

ڕێژە سگۆشەییەکانی گۆشەی θ لە بارِی پێوانەییدا هەژمار بکە، ئەگەر بزانی ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر لای کۆتایی گۆشەکە.

68 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **69** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **70** $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

وانەی 3

پێوانەی بازنەیی Radian Measure



ئامانجەکان

- پێوانەی شەستی دەگۆڕێ بۆ پێوانەی بازنەیی و بە پێچەوانەشەوە
- درێژی کەوانەیەك لەسەر بازنە هەژماردەکات.

بۆچی؟ پێوانەی بازنەیی بەکاردێنێت بۆ باسکردنی رووداوە خولییەکان وەك شەپۆلەکانی بۆمەلەرزە و گۆرانکارییەکانی کەش وەهوا وجولانەوەی بازنەیی تەنەکان وەك مانگە دەستکردەکان

جێبەجێکردنەکان

کەشناسی

بازنەی یەکە

ئەو مانگە دەستکردەی کە کەش وەهوا دەستنیشاندەکات لەبەرزی 750 35 کلم بەنزیکەیی لە گۆی زەوییە دەسوڕێتەوە. ئایا **خێرایی هێڵی Linear Speed** مانگەکە چەندە؟ ئەگەر هەر 24 کاتژمێر جارێك بەدەوری زەویدا بسوڕێتەوە **گۆشەخێراییەکەی** چەندە؟

لەپۆلەکانی پێشوودا فێربوویت کە گۆشەکان بە پلە بپێویت بەلاَم لەم وانەیەدا پێوانەیەکی نوێ فێربوویت بۆ پێوانی گۆشە پێی دەوترێت **پێوانەی بازنەیی کە یەکەی پێوانەکەی بریتییە لە رادیان**. بەلاَم سیستمی پێوانە بە پلە پێی دەوترێت **پێوانەی شەستی**.

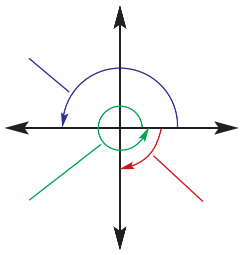
چالاکی

دۆزینەوەی رێژەی بازنەیی Exploring Radian Ratio

پێویستیت بە شریتێکی سەنتیمەتری و چەند قووتویەکی لوولەکی هەیە.

1. تیرەی بنکەی ژمارەیەك لەو قووتوانە کە پێوانەکانیان جیاوازە بپێوە و چێوەی هەر یەکێکیان بپێوە. ئەم ئەنجامانەی دەستتکەوتوە لە خشتەیەك دابنێ.
2. هەژمێری رێژەی چێوە بۆ تیرەی بنکەی هەر قووتویەك بکە و ئەوانە لە خشتەکەدا بنووسە.
3. بەهاکانی هەموو ئەو رێژانە نزیکدەبنەوە لە بەهایەك کە ژمارەیەکی بەناوبانگە و دەیزانین. ئەو ژمارەیە چییە؟

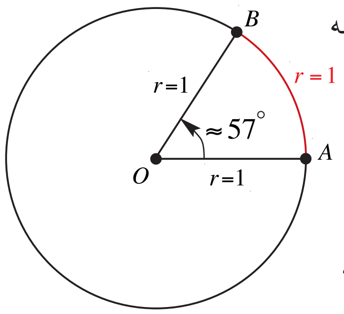
خاڵێ چاودێری ✓



چێوەی بازنە = $2\pi r$، لەبەر ئەوەی نێوەتیرەی بازنەی یەکە یەك یەکەیە ئەوا چێوەی بازنەکە = 2π.

ڕادیان(گۆشەی نیوەتیرەیی) بەوە پێناسە دەکرێت کە پێوانەی چەقە گۆشەیەکە لە بازنەیەك نیوەتیرەکەی r و کەوانەیەك درێژییەکەی r دیاریدەکات ئەگەر بازنەی یەکەت بەکارهێنا. ئەوا گۆشەی نیوەتیرەیی پێوانەی چەقە گۆشەیەك لەبازنەیەکی یەکەییدا کەوانەیەك دیاریدەکات کە درێژیەکەی 1 بێت.لەم پێناسەیەوە ئەوەمان دەستدەکەوێت کە پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشەیەکی وەستاوە دەکاتە چارێگی چێوەی بازنەی یەکە. کەواتە $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ گۆشە نیوەتیرەییە، و پێوانەی گۆشەیەکی خول تەواو دەکاتە 2π گۆشە نیوەتیرەیی بەواتایەکی تر:

یەك گۆشەی نیوەتیرەی $\frac{1}{2\pi}\times 360^\circ \approx 57^\circ$



گۆڕینی پێوانە گۆشەیەك	
لەپلە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی	لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە
لە $\frac{\pi}{180}$ ی بدە	لە $\frac{180}{\pi}$ ی بدە

نموونە 1

ئەمانە بگۆڕە لە پلەوە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە.

أ 40° ب 3π گۆشەی نیوەتیرەی

شیکار

أ $40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{9}$ ب $3\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=540^\circ$

هەوڵبدە -120° بگۆڕە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی و $-\frac{2}{3}\pi$ بگۆڕە بۆ پلەك.

خاڵی چاودێری گۆشەیەك پێوانەکەی 1° . پێوانەکەی بەگۆشەی نیوەتیرەی چەندە؟

نموونە 2

هەژمێری ئەم ڕێژە سێگۆشاییانە بکە.

أ $\sin\frac{\pi}{3}$ ب $\cos\frac{3\pi}{4}$ ج $\tan\frac{4\pi}{3}$

شیکار

دەستبکە بە گۆڕین لە گۆشەی نیوەتیرەییەوە بۆ پلەك پاشان هەژماری ڕێژە سێگۆشییەکان بکە.

أ $\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=60^\circ$

$\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب $\frac{3\pi}{4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$

$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos 135^\circ$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج $\frac{4\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=240^\circ$

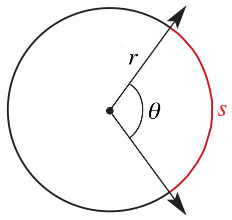
$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan 240^\circ$

$=\sqrt{3}$

هەوڵبدە ئەمانە هەژمێربکە: $\tan\frac{5\pi}{4}$ ، $\cos\frac{2\pi}{3}$ ، $\sin\frac{3\pi}{2}$

خاڵی چاودێری گۆشە تایبەتییەکان ئەم گۆشانەن $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$. بازنەیەکی یەکە بکێشە و گۆشە تایبەتییەکانی لەسەر بکێشە، پێوانەی هەریەکێکیان بنوسە بەگۆشەی نیوەتیرەیی.

درێژی کەوانە Arc Length



شێوەی بەرامبەر بازنەیەك ڕووندەكاتەوە كە نیوەتیرەكەی r و پێوانەی چەقە گۆشەكەی θ گۆشە نیوەتیرەییە. دەتوانیت هاوڕێژە بەكاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕێسایەك بۆ هەژمێاركردنی درێژی كەوانەكەی s. كە چەقە گۆشەكە دیاریدەكات:

پێوانەی θ بەگۆشەی نیوەتیرەیی ← $s = r\theta$ → درێژی كەوانەكە

پێوانەی بازنەكە بەگۆشەی نیوەتیرەیی $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$ چێوەی بازنە

درێژی كەوانە Arc Length

بۆ هەژمێركردنی درێژی كەوانەیەك s كە چەقی گۆشەیەك دیاریكردووە پێوانەكەی θ گۆشەی نیوەتیرەیە لە بازنەیەك كە نیوەتیرەكەی r. ئەم ڕێسایە بەكاربهێنە. $s = r\theta$

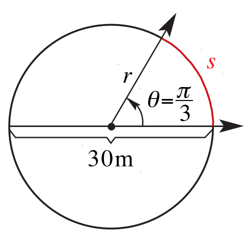
سەرەنجێكی ڕەخنەگرانە

ئایا دەتوانیت ئەو پێناسەیەی بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی (رادیان)ت كردوە لەوانەی یەكەم لێكبدیتەوە؟

نموونە 3

هەژمێری درێژی ئەو كەوانە بكە كە چەقە گۆشەیەك گۆشەیەك دیاریكردووە پێوانەكەی $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەكدا كە تیرەكەی 30m بێت

شیكار



لەبەر ئەوەی تیرەی بازنەكە 30 m ئەوا.

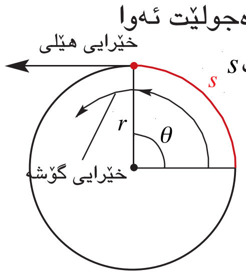
نیوەتیرەكەی یەكسانە بە 15 .

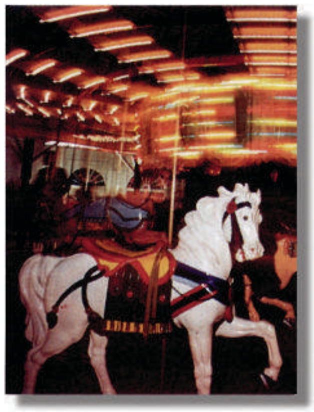
$s = r\theta = 15 \times \frac{\pi}{3} = 5\pi$

كەواتە درێژی كەوانەكە 5π m یان 15.7m بەنزیكیی.

هەوڵبدە

هەژماری درێژی ئەو كەوانەیە بكە كە ئەو چەقەگۆشەیە دیاریدەكات كە پێوانەكەی 0.6 گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەك نیوە تیرەكەی 1.25m .





كاتێك تەنێك بە خێرایەكی نەگۆڕ لە ڕێڕەوێكی بازنەی كە نیوەتیرەكەی r دەجولێت ئەوا **خێرایی هێڵی Linear Speed** بۆ ئەو تەنە دەكاتە ڕێژەی درێژی كەوانەیەك s كە تەنەكە دەیبڕێت بۆ كات t واتە $\frac{s}{t}$ یان $\frac{r\theta}{t}$ كاتێك θ گۆشەی خولانەوەی تەنەكە دەنوێنێت بە گۆشەی نیوەتیرەیی.

(گۆشە خێرایی) (السرعه الزاویه) بۆ تەنێك بریتییە لە ڕێژەی پێوانە گۆشەی خولانەوەكەی θ بەگۆشەی نیوەتیرەیی بۆكات t واتە $\frac{\theta}{t}$.

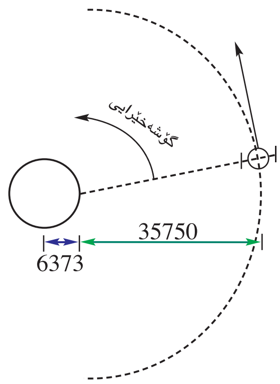
نموونە 4

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە وانەی یەکەم. هەژمێری خێرایی هێڵی (السرعه الخطیه) وگۆشە خێرایی بۆ مانگێکی دەستکرد بکە ئەگەر بزانی نیوەتیرەکەی یەکسانە بە **6 373** کم بە نزیکەیی.

کەش ناسی

شیکار

دەستبکە بە دۆزینەوەی نیوەتیرەی مانگە دەستکردەکە.



نیوەتیرەی مانگی دەستکرد = نیوەتیرەی زەوی + بەرزی مانگەکە

= 6 373 + 35 750

= 42 123

خێرایی هێڵی بۆ مانگەکە کاتێك هەڵدەستێت بە خولێکی تەواو (2π گۆشە نیوەتیرەیی) لە 24 کاتژمێر خێرایی هێڵی

$$\frac{r\theta}{t} = \frac{42123 \times 2\pi}{24} \approx 11028$$

کەواتە خێرایی هێڵی مانگە دەستکردەکە هێڵیە 11 208km کم/کاتژمێر بەنزیکەیی.

ئێستا هەژماری گۆشەخێرایی بۆمانگە دەستکردەکە بکە بە بەکارهێنانی ڕێسای $\frac{\theta}{t}$.

گۆشەخێرایی $\frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

کەواتە گۆشەخێرایی مانگە دەستکردەکە $\frac{\pi}{12}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە کاتژمێرێکدا.

هەوڵبدە هەژمێری خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بکە بۆ کەسێك لە سەر زەوی کە 6373 کلم دوورە لە چەقەکەوە.

ڕاهێنان

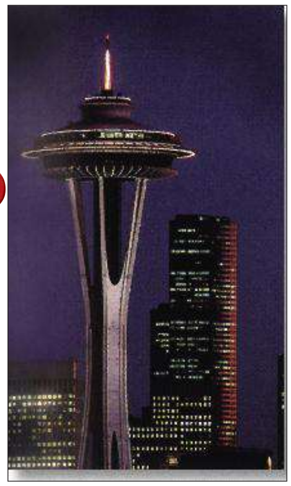
بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشە چییە؟ بەچی جیاوازە لە پێوانەی شەستیەکەی؟

2 چۆن گۆڕانکاری دەکەیت لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە و بە پێچەوانەشەوە؟

3 چۆن درێژی کەوانەیەك کە سنووردراوە بە چەقەگۆشە لە بازنەیەکدا دەگۆڕیت ئەگەر نیوەتیرەی بازنەکە چەندجارە بکرێت؟

4 خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بۆ تەنێك کە لەسەر ڕێڕەوێکی بازنەیی بجولێت چییە؟ و جیاوازی چییە لەنێوانیاندا؟



ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەمانە بگۆڕە لە پلە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان بە پێچەوانەشەوە.

5 120°

6 $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرە

هەژمێرەی هەریەك لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە.

7 $\sin \frac{2\pi}{3}$

8 $\cos \frac{5\pi}{4}$

9 $\tan \frac{5\pi}{3}$

10 هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیە بکە کە چەقە گۆشەیەك دیاریدەکات پێوانەکەی $\frac{4\pi}{3}$ لە بازنەیەکدا تیرەکەی 90cm بێت.

11 **بۆخۆشی** تیرەی چێشتخانەیەکی خولاوە لە لوتکەی تاوەرێکدایە 60 مەترە و ئەم چێشتخانەیە سورێکی تەواو دەخولێتەوە بە 58 خولەك. خێرایی هێڵی و گۆشەخێرایی پیاوێك کە دانیشتووە لە نزیك پەنجەرەیەك لە پەنجەرەکانی چێشتخانەکە بدۆزەوە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە بگۆڕە لە پێوانەی شەستی بۆ پێوانەی بازنەیی.

12 180° **13** 90° **14** 360° **15** 270°

16 -30° **17** -120° **18** -240° **19** -240°

20 720° **21** 930° **22** 80° **23** 160°

ئەمانە بگۆڕە لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد لە پلە.

24 2π **25** π **26** $\frac{\pi}{2}$ **27** $\frac{\pi}{4}$

28 $\frac{\pi}{3}$ **29** $\frac{\pi}{6}$ **30** $-\frac{\pi}{2}$ **31** $-\frac{\pi}{4}$

32 -3.91 **33** -9.799 **34** 9.27 **35** 4.96

هەژماری هەریەك لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە .

36 $\sin\pi$ **37** $\cos\pi$ **38** $\cos\frac{\pi}{3}$ **39** $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

40 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **41** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **42** $\tan\pi$ **43** $\tan\frac{\pi}{4}$

44 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **45** $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ **46** $\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ **47** $\cos 5\pi$

هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیەبکە کە هەریەك لەم چەقە گۆشانە لەبازنەیەکدان کە نیوەتیرەکەی 10 مەترە

48 3.8 گۆشەی نیوەتیرەیی **49** 2.4 گۆشەی نیوەتیرەیی **50** 45 گۆشەی نیوەتیرەیی

51 72گۆشەی نیوەتیرەیی **52** 4.28 گۆشەی نیوەتیرەیی **53** 0.67 گۆشەی نیوەتیرەیی

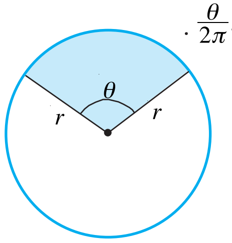
54 $\frac{\pi}{3}$گۆشەی نیوەتیرەیی **55** $\frac{2\pi}{3}$ گۆشەی نیوەتیرەیی **56** $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی

57 $\frac{\pi}{2}$گۆشەی نیوەتیرەیی **58** $\frac{7\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی **59** $\frac{7\pi}{6}$ گۆشەی نیوەتیرەیی

بەستنەوە

ئەندازە ڕووبەری کەرتە بازنەیەی کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەك کە پێوانەکەی θ گۆشە نیوەتیرەییە بەشێکە لە بە هەی πr^2 لە ڕووبەری بازنەکە $\frac{\theta}{2\pi}$.

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$$

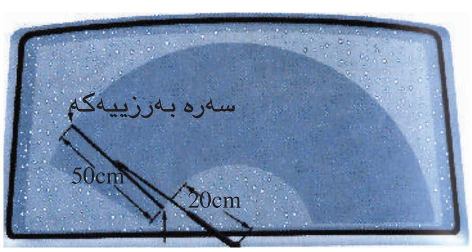


60 هەژمێری ڕووبەری کەرتە بازنەیەك بکە کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەك پێوانەکەی $\frac{7\pi}{6}$ لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 20 m بێت.

61 هەژمێری پێوانەی چەقە گۆشەیەك بکە لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 12 cm بێت ئەگەر بزانی ڕووبەری کەرتە بازنەییەکەی گۆشەکەی دیاریکردووە دەکاتە $55.5\ \text{cm}^2$.

جێبەجێکردن

ئەندازە فلچەی شوشەی ئوتومبیلێك دەخولێتەوە بەگۆشەیەك پێوانەکەی $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەترەیی بێت لەهەر 0.9 لە چرکەدا.



62 هەژمێری ئەو دوورییە بکە کە خاڵێك لەسەر کۆتایی بەرزییەکەی و خاڵێك لەسەر کۆتایی نزمییەکەی دەیبڕێت، کاتێك فلچەکە دەخولێتەوە بە $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی.

63 خێرایی هێڵی بۆ هەریەکە لە دوو خاڵەکەی پێشوو بە سانتیمەتر لە چرکەیەکدا هەژمێربکە، هەژمێری ئەو دوو خێراییە بە کیلۆمەتر لە کاتژمێرێکدا بکە.



تەکنەلۆجیا خوێنەری پەپکە پەستێنراوەکان پەپکەکە دەسووڕێنێتەوە بە گۆشە خێراییەکی نەگۆڕ، بەڵام خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك لەسەر پەپکەکە دەگۆڕێت بە پێی نیوەتیرەی ئەو بازنەیەی کە خاڵەکەی لەسەرە. وا دابنێ کە پێدراوەکان نوسراون لە سەر پەپکێك لە ناو بازنەیەك کەتیرەکەی 6 cm بێت.

64 خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە سەر لای ئەو بازنەی کە زانیارییەکەی تێدایە. ئەگەر بزانی کە پەپکەکە دەسوڕێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 200 خول لە خولەکێکدا:

65 خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە دووری 2cm لەلای دەرەوەی بازنەیەك کە زانیارییەکەی تێدایە، ئەگەر بزانی پەپکەکە دەخولێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 240 خول لەخولەکێکدا.

پێشبرکێی ئۆتۆمبیلەکان لە گۆڕەپانێکی بازنەیی پێشبرکێیەك دەکەن کە نیوەتیرەکەی 300m ە. یەکێك لە ئۆتۆمبیلەکان کەوانەیەکی بڕی کە پێوانەی چەقە گۆشەکەی $120°$ لە 17.5 چرکەدا.

66 خێرایی هێڵی ئەو ئۆتۆمبیلە بە مەتر لە چرکەدا هەژمار بکە.

67 گۆشەخێرایی بۆ ئەو ئۆتۆمبیلە بە گۆشەی نیوەتیرەیی لە چرکەدا هەژمار بکە.

ڕوانین بۆ دواوە

هەر لاسەنگەیەك شیکاربکە. کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

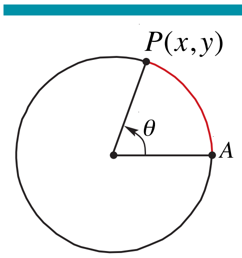
68 $|x-4| \le -2$ **69** $|2-x| > 1$ **70** $|3x+5| < 4$

هەریەکە لەم هاوکێشە ڕێژەییانە شیکاربکە و پاسادانی شیکارەکە بکە بەهەر ڕێگایەك بێت.

71 $\frac{x-3}{x+5} = \frac{x}{2+1}$ **72** $\frac{y}{y-4} - \frac{y}{y+2} = \frac{5}{y^2-2y-8}$

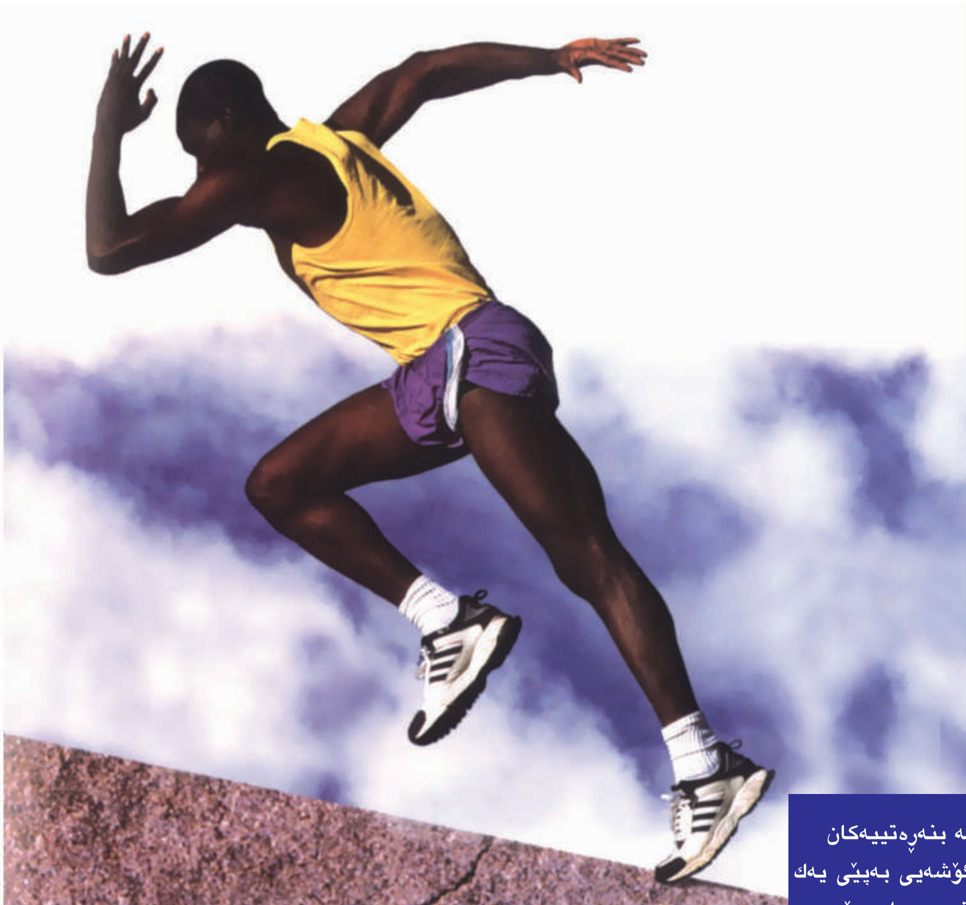
ڕوانین بۆ پێشەوە

73 هەژمێربکە $\sin^2\theta + \cos^2\theta$



هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان
Fundamental Trigonometric Identies

وانەی 4



ئامانجەکان

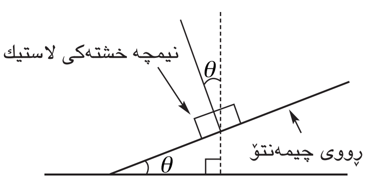
- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان دەسەلمێنێ.
- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ کورتکردنەوەی برە سێگۆشەییەکان بەکاردێنێت.

بۆچی؟ دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربهێنیت بۆ نوسینەوەی بڕێکی سێگۆشەیی بەپێی یەك لە ڕێژە سێگۆشەییەکان، کە ئەمە یارمەتیت دەدات بۆ شیکاری ژمارەیەکی زۆر لە پرسیارەکان لە ژیانی ڕۆژانەدا وەك دیاریکردنی گۆشەی خزان، کەوا لە نیمچە خشتەکێکی لاستیك دەکات کە دانراوە لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆ دەست بەخزاندن بکات.

جێبەجێکردنەکان

فیزیا

لاکێشە تەریبێکی لاستیك دانرا لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆیی. کە دەتوانرێ یەکێك لە لاکانی بە هێواشی بەرزکرێتەوە. گۆشەی چەمانەوە دەبێتە چەند کاتێك لاکێشە تەریبەکە دەستدەکات بە خزان؟ زاناکان ئەم گۆشەیان بەکارهێناوە بۆ دۆزینەوەی **هاوکۆلکەی لێکخشاندن Coefficient of Static Friction μ_s** کەنەگۆرە m لە نێوان لاستیك و چیمەنتۆیەکەدا .ئەو هاوکۆلکە دەکاتە 1.4 .

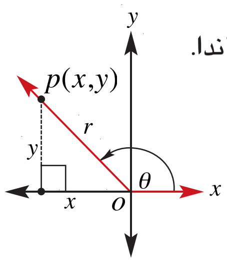


ئەوەی لە خزاندنی لاکێشە تەریبەکە ڕێگری دەکات هێزێکە بریتییە لە بڕی $\mu_s mg\cos\theta$ کە هێمای m هاوکۆلکەی لێك خشاندنە، g بارستایی نیمچە شەشپاڵووەکە و μ_s خێرایی ڕاکێشانە بەڵام ئەو هێزەی پاڵنەری خزاندنەکەیە بەبڕی $mg\sin\theta$ دەردەبڕی و کاتێك دوو هێزەکە یەکسان بن ئەوا. ئەوا $1.4mg\cos\theta = mg\sin\theta$ ئەم هاوکێشەیە بۆ هەژماری گۆشە θ بەکاربهێنە کە پێی دەوترێت گۆشەی خزان.

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان **Trigonometric Identities** ئەو هاوکێشانەن کە بەڕاستی دەمێنەیتەوە هەرچەندە گۆڕانکاری لە بەهایەکانی گۆڕاوەکانیاندا بکرێت،لەبیرت بێت کە پۆتانی خاڵێك لەسەر کۆتالاکەی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا ڕێگا دەدات بە هەژمارکردنی ڕێژەی سێگۆشەیەکانی ئەو گۆشەیە وەك خوارەوە:

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \text{ ، } \cos\theta=\frac{x}{r} \text{ ، } \tan\theta=\frac{y}{x} \text{ ، } x\neq 0$$

کاتێك r دووری پۆتانی خاڵەکەیە لە خاڵی بنەڕەت بێت لە ڕووتەختی پۆتانادا.



نموونە 1

ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

شیکار

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{r}\div\frac{x}{r}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

دەتوانێت هاوئەنجامەکانی تر بەهەمان ڕێگا بسەلمێنی یان بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیثاغۆرس

هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان Fundamental Trigonometric Identities

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \qquad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

نموونە 2

ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

شیکار

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2+x^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$$

هەوڵبدە ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە: $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنەوەی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنی و بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بیانووسی.

نموونە 3

ئەم بڕە $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

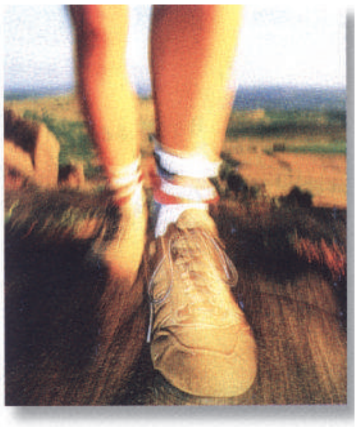
شیکار

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}=\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}=1+\cos\theta$$

هەوڵبدە ئەم بڕە $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$ بەپێی یەك لە ڕیژە سێگۆشەییەکان بنووسە .

نموونە 4

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، یەکسانبوونی $mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$ بەکاربهێنەبۆ دیاریکردنی گۆشەی خزاندن لە هەر بارێکدا.



أ خزانی لاستیك لەسەر چیمەنتۆ، $\mu_s = 1.4$

ب خزانی شووشە لەسەر کانزایەکی چەورکراو $\mu_s = 0.25$.

شیکار

أ

$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 1.4 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 1.4 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 1.4$$
$$\theta \approx 54.5^{\circ}$$

ب

$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 0.25 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 0.25 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 0.25$$
$$\theta \approx 14.0^{\circ}$$

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ئەو پەیوەندییە چییە کە sin و cos و tan بەیەکەوە دەبەستێت؟

2 ئەو پەیوەندییە چییە لە نێوان هاوئەنجامی $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ و سەلمێنراوی فیثاگۆرس هەیە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$.

4 ئەم برە $\frac{\cos^2 \theta}{1+\sin \theta}$ بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

5 $\frac{1}{\tan^2 \theta}$ بەپێی $\sin \theta$ بنووسە.

جێبەجێکردن

6 فیزیا گۆشەی خزان بۆ جۆرێك لاستیك لەسەر چیمەنتۆ دیاریبکە کاتێك $\mu_s = 1.2$.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

بەبەکارهێنانی پێناسەی ڕێژە سێگۆشەییەکان ئەو هاوئەنجامانە بسەلمێنە.

7 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ **8** $\frac{1}{\sin^2\theta} = 1+\frac{1}{\tan^2\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی یەك ڕێژە سێگۆشەیی بنووسە.

9 $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$ **10** $\tan\theta\cos\theta$ **11** $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$ **12** $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی $\cos\theta$ بنووسە.

13 $2\sin^2\theta-1$ **14** $\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\sin^2\theta\right)$

15 $\left(1-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$ **16** $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی $\sin\theta$ بنووسە.

17 $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$ **18** $\frac{1}{\tan^2\theta}$

19 $\cos^2\theta\tan^2\theta+\frac{1}{\sin\theta}$ **20** $\tan^2\theta\sin^2\theta$

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی ڕاستی هەریەك لەمانە.

21 $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta-1} = -\frac{1}{\cos}$ **22** $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta-1} = -\frac{1}{\sin\theta}$

بەستنەوە

23 هەریەك لە $\tan\theta$ و $\sin\theta$ بەپێی $\cos\theta$ بنووسە

جێبەجێکردن



فیزیا بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکە لێك خشاندنی سەرەتای وانەکە هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$ بۆ دیاریکردنی گۆشەی خزان بۆ هەر تەنێك بەکاربهێنە.

24 تەختەی مۆمکراو لەسەر بەفر $\mu_s = 0.14$

25 تەختە لەسەر تەختە: $\mu_s = 0.4$

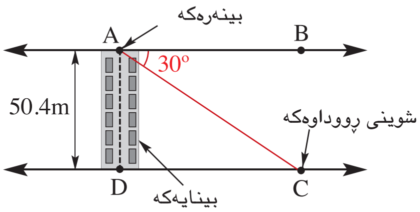
26 تەختە لەسەر قرمید: $\mu_s = 0.6$

27 ئاوریشم لەسەر ئاوریشم: $\mu_s = 0.25$

ڕوانین بۆ دواوە

28 هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی $y = 2(x-3)^2 + 5$ بکێشە. پۆتانی سەربڕگە هاوتاکە کامەیە؟

29 لە هێڵکاری بەرامبەردا گۆشەی $\widehat{BAC}$ نزمەگۆشەیە. خاڵی A چاوی کەسێکە لەسەر بینایەک وەستاوە دەڕوانیتە ڕووداوێکی هاتوچۆ لە خاڵی C دا، شوێنی ڕوداوەکە چەند لە خاڵی D بنکەی بیناکەوە دوورە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەشی سەدی لەمەتر نزیکبکەوە.



ڕوانین بۆ پێشەوە

30 لە جیاتی $\sin\theta$ نەزانراوی x لە هاوکێشەی $\sin^2\theta + 2\sin\theta - 3 = 0$ دا دابنێ.ئەو هاوکێشە دووجایەی دەستدەکەوێت شیکاربکە. پاشان بەهای گۆشەی θ بدۆزەرەوە کە پاسادانی هاوکێشە سێگۆشەییەکە دەکات.

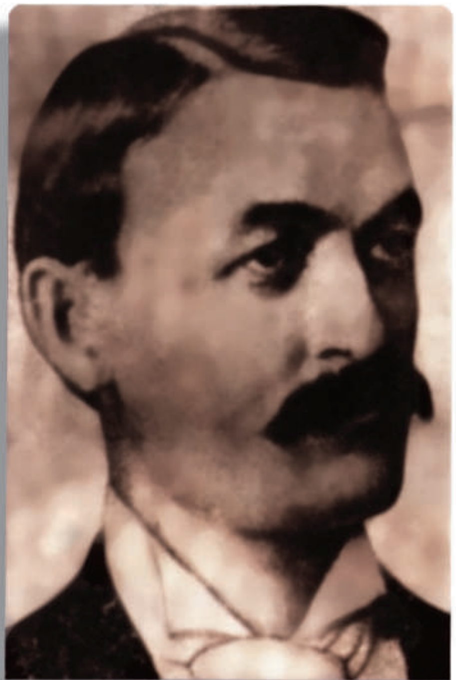
بەش پرۆژەی

چەرخی شاری یاری

لە گرنگترین یارییە خۆشەکانی شاری یاری سواربوونی چەرخە گەورەکەیەتی کە لەوێوە لە بەرزی جیاجیا سەیری دیمەنی شار دەکەیت بە خولانەوەی چەرخەکە ئەو بەرزییە دەگۆڕێت. ئەو کەسەی یەکەم جار نموونەیەکی لەم چەرخە دروستکرد پیاوێکی ئەمریکی بوو بەناوی جۆرج فێریس ئەوەش بەبۆنەی پێشانگایەکی نێودەوڵەتی بوو لە شاری شیکاغۆی ئەمریکا لە ساڵی 1893 زاینیدا تیرەی چەرخێك. لە یەکێك لە شارەکانی یاریدا 40 مەترە و تەوەرەکەی لەبەرزی 21 مەتر دایە ئەم چەرخە 40 کورسی تایبەتی هەڵگرتووە کە هەریەکیان 6 کەس دەگرن چەرخەکە خولێکی تەواو لە 440 چرکەدا تەواودەکات.







چالاكی 1

نموونەیەك بۆ چەرخێكی شاری یاری لە ڕووتەختی پۆتاندا دروستبكە كە تەوەرەی چەرخەكە لە خاڵی بنەڕەتدا بێت. خشتەیەك بۆ بەهاكانی دووری خاڵێك لە لێواری چەرخەكە لە تەوەری سینەكان پێكبهێنە، بۆ هەر سوڕانەوەیەكی چەرخەكە، بەبەكارهێنانی گۆشەكانی سوڕانەوە $0°$ ، $90°$ ، $180°$ ، $270°$ ،... $810°$ لە ڕووتەختی پۆوتاندا، هەرجوتێكی ڕێكخراو كە پێكهاتووە لە گۆشەی سوڕانەوە و بەرزییەكەی بنوێنە، كە گۆشەكانی تەوەری سینەكان بگریتەوە خاڵەكان بگەیەنە بۆ كێشانی وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی گونجاو.

چالاكی 2

خشتەیەك دروستبكە بۆ بەهاكانی بەرزی سورابویەك (وای دابنێ لەسەر لێواری دانیشتووە) لە ڕووی زەوییەوە بە گۆڕانی گۆشەی سوڕانەوە. گۆشە سوڕانەوەی چالاكی 1 بەكاربهێنە لە ڕووتەختی پۆتانەكەدا، هەر جووتێكی ڕێكخراو لە گۆشەی سوڕانەوەی بەرزی سواربووەكە لە ڕووتەختی پۆتانەكەدا پێكهاتووە بنوێنە كە گۆشەكانی تەوەری سینیەكان بگرنەوە. خاڵەكان بگەیەنە بۆ كێشانی وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی گونجاو.

چالاكی 3

1. خشتەكەی چالاكی 2 بەكاربهێنە كەچەرخەكە خولێك تەواو دەكات لە 440 چركەدا، بۆ گۆڕینی یەكەكانی تەوەری سینەكان لە پلەكەوە بۆ كات بەچركە. لە ڕووتەختی پۆتانەكەدا هەر جووتێكی ڕێكخراوكە لەكات بە چركە لەڕووتەختی پۆتانەكەدا هەر جووتێكی ڕێكخراوكە لەكات بە چركە و بەرزیەكەی پێك هاتووە بنوێنە كە گۆشەكان تەوەرەی سینیەكان بگرنەوە. خاڵەكان بگەیەنە بۆ كێشانی وێنەیەكی ڕوونكردنەوەی گونجاو.

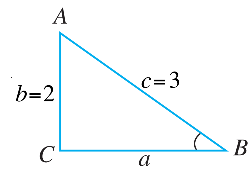
2. خێرایی هێڵی سواربوەكە بە كیلۆمەتر لە كاتزمێرێكدا هەژماربكە.



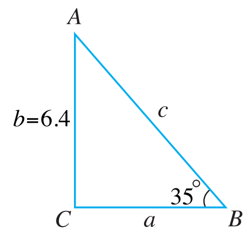
بەشی 8 پێداچوونەوەی

هەریەك لەم سێگۆشە وەستاوانە شیكاربكە

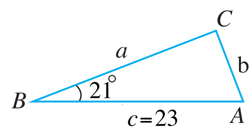
1



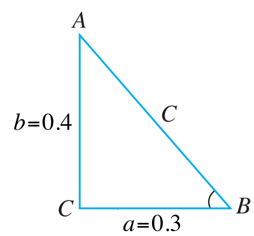
2



3



4



گۆشە گەڕانەوەی هەریەكە لەم گۆشانە دیاریبكە

5 270°	**6** 150°	**7** -135°
8 -225°	**9** 380°	**10** 440°
11 $1\,028^\circ$	**12** 973°	**13** -515°

ئەم ڕێژە سێگۆشەییانە هەژماربكە.

14 $\cos 135^\circ$	**15** $\sin 315^\circ$
16 $\tan 225^\circ$	**17** $\cos 0^\circ$
18 $\sin(-270^\circ)$	**19** $\cos(-180^\circ)$
20 $\tan(-90^\circ)$	**21** $\cos 675^\circ$
22 $\sin 600^\circ$	**23** $\tan 765^\circ$

خاڵی P دەكەوێتە سەر بازنەیەك چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەكەی r و كۆتالاكەی گۆشەی θ بێت لە باری پێوانەییدایە خاڵی p دیاربكە.

24 $\theta = 60$ ؛ $r = 1$

25 $\theta = -30$ ؛ $r = 2$

26 $\theta = 240$ ؛ $r = 5$

27 $\theta = -240$ ؛ $r = 3$

لە پلە بۆ ڕادیان یان لە ڕادیان بۆ پلە ئەمانەی خوارەوە بگۆڕە وەڵامەكان بۆ نزیكترین دە لە پلە نزیكبكەوە.

28 78°

29 334.61°

30 -230°

31 $\frac{\pi}{7}$ ڕادیان

32 $-\frac{15\pi}{16}$ ڕادیان

33 8.87 ڕادیان

34 هەژمێری درێژی ئەو كەوانەیەی سنووردراوە بە چەقەگۆشەیەك پێوانەكەی 30° یە لە بازنەیەكدابكە، كە نیوەتیرەكەی 4.5 مەترە.

هەر برێكی سێگۆشەیی لەمانەی خوارەوەدا بەپێی یەكەی ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە.

35 $\cos^2\theta \tan^2\theta$

36 $\tan^2\theta \frac{1}{\cos^2\theta}$

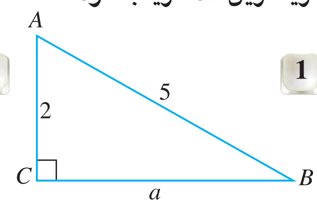
37 $\frac{\cos^2\theta}{\tan^2\theta+1}$

38 $\frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta-1}$

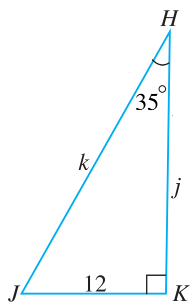
8 تاقیكردنەوەی بەش

هەر یەك لەم سێگۆشانە شیكاربكە. باپێوانەی گۆشەكان نزیككراوەبن بۆ نزیكترین پلەو و پێوانەی لاكان بۆ نزیكترین دە نزیكبكەوە.

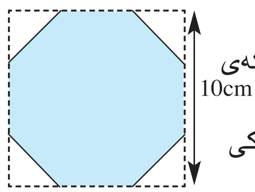
1



2



3 ژینۆ هەشت لایەكی ڕێكی دروستكرد ئەویش بە بڕینی سێگۆشەی لایەكسان لە هەر چوار لوتكەی چوارگۆشەكەوە كە درێژی لایەكی 10 بێت درێژی لایەكی هەشت لایەكە چەندە؟



بۆ هەریەك لەم گۆشانە ئەگەر هەبوو گۆشە گەراوەكانیان دیاریبكە

4 137° **5** 515° **6** 38° **7** $1\,729^\circ$

هەژماری ئەو ڕێژە سێگۆشەییە داواكراوە بۆ گۆشەی θ بكە بەزانینی ئەو چارێگەی كۆتالا گۆشەكەی تێكەوتووە لە باری پێوانەییدا و زانینی بەهای ڕێژە سێگۆشەییە پێدراوەكان.

8 چارێگی چوارەم $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

9 چارێگی دووەم $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

هەریەك لەم ڕێژەی سێگۆشەییانە هەژماربكە. با وەڵامەكەت بە تەواوەتی بێ.

10 $\sin 330^\circ$ **11** $\cos(-150^\circ)$ **12** $\sin 720^\circ$

13 $\tan(-765)$ **14** $\cos 300^\circ$ **15** $\tan 270^\circ$

پۆتانی خاڵی یەكتربڕینی بازنەیەك هەژماربكە. چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەكەی r لەگەڵ كۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا. با وەڵامەكان بەتەواوی بن.

16 $r=5$ ؛ $\theta=30^\circ$

17 $r=12$ ؛ $\theta=225^\circ$

18 $r=4$ ؛ $\theta=-150^\circ$

19 $r=8$ ؛ $\theta=300^\circ$

20 **چیا** لێژی چیایەك دەكاتە $\frac{7}{12}$ واتە تا لە چیاكە 7 مەتر بەرزبینەوە دووری بەرامبەرەكە 12 مەتری ئاسۆیی دەبێت بەرزە گۆشەی چیاكە چەندە؟

لە پلە بۆ ڕادیان بگۆڕە، و بە پێچەوانە، با وەڵامەكان بە تەواوی بن

21 315° **22** -150° **23** 495°

24 $\frac{\pi}{12}$ **25** $\frac{5\pi}{4}$ **26** $-\frac{5\pi}{3}$

27 **پیشەسازی** تیرەی پانكەیەك 12cmە، بە خێرایی $33\frac{1}{3}$ لە چركەیەكدا دەخولێتەوە خێرایی هێڵی خاڵێك چەندە كە 4cm لە تەوەری پانكەكەوە دوورە.

هەموو بەها گونجاوەكان بۆ گۆشەی θ هەژمار بكە ئەگەر بزانیت $0 < \theta < 360^\circ$

28 $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **29** $\cos\theta = \frac{1}{2}$

30 $\tan\theta = 1$ **31** $\tan\theta = \sqrt{3}$

هەریەك لەم برانە بەپێی یەك ڕێژە سێگۆشەیی بنووسە.

32 $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta} \times \cos\theta$

33 $\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta - \sin^2\theta$

34 $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

پۆتانی هەریەك لەو خاڵانە هەژمێربكە بەسوڕانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت و بە گۆشە پێدراوەكان.

35 (5.8) ؛ 30° **36** (-2.6) ؛ -60°

37 درێژی میلی چركەژمێرێك 3cm . ئەو دوورییە چەندە كە سەرەكەی لە 5 چركەدا دەیبڕێت.

8

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ پێکهاتووە لەگشت ژمارەی ڕاستییەکان جگە لە.

أ 1 ب -1 ج $-\frac{3}{2}$ د $\frac{3}{2}$

2 کام لە زۆرڕادەکانی خوارەوە یەکسانە بە زۆر ڕادەداری.

$$\left(2x^3-x^4\right)+\left(3x^2-5\right)-\left(x^2-x^4+1\right)$$

أ $-2x^4+2x^3+3x^2-6$

ب $2x^3+2x^2$

ج $2x^3+2x^2-4$

د $2x^3+2x^2+4$

3 پۆی سینی سەری برگە هاوتای $f(x)=2x^2-4x+1$ کامەیە؟

أ -1 ب 1 ج 2 د $-\frac{1}{2}$

4 کام لەم ژمارانە ناکرێت بە شێوەی ڕێژەی دوو ژمارەی تەواو بنووسرێت.

أ خۆبەش ب تەواو

ج ڕێژەیی د ناڕێژەیی

5 شیکاری $|2x+5|=11$ دەکاتە.

أ $-3;\ 3$ ب $-8;\ 8$

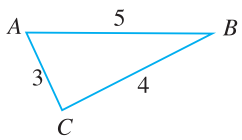
ج $-8;\ 3$ د $-3;\ 8$

6 دوو گوڕاوی x و y پەیوەستن بەیەکتریەوە بە گۆڕانێکی ڕاستەوانە. نەگۆڕی گۆڕانەکە لەم پەیوەندییەدا کامەیە ئەگەر بزانین $y=8$ کاتێك $x=4$

أ $\frac{1}{2}$ ب 2 ج 32 د -2

7 بەهای بڕی $3\left(\sqrt{45}\right)^2$ چەندە؟

ئەم سێگۆشەیە بەکاربهێنە بۆ هەژماری ڕێژەی سێگۆشەییەکانی.



8 $\sin A$

9 $\cos A$

10 $\tan B$

11 $\sin B$

12 یاسا «دەستوور» بەکاربهێنە بۆ شیکاری هاوکێشە دووجای $5x^2+x-2=0$.

13 ئەم لاسەنگە ڕێژەییە $\frac{6}{x-2}>\frac{5}{x-3}$ شیکاربکە.

14 بە شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە کە بە خاڵی $(-3,4)$ دا دەڕوات و لەسەر ڕاستەهێڵی $y=3x-5$ ئەستوونە.

15 بڕی $\frac{x}{x+4}\div\frac{6x^2}{3x+12}$ سادەبکە.

16 بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2-3x}$ دیاریبکە؟

17 بڕی $3y(5x+2)-4(5x+2)$ شیتەڵ بکە.

18 بەهای $\sin\frac{\pi}{2}$ چەندە؟

19 گۆشەی گەڕانەوەی سەر بەگۆشەیەك پێوانەکەی 640° بێت چەندە ؟

20 **ئەگەر** بەچەند ڕێگا دەتوانیت سەرۆك و جێگری سەرۆك هەڵبژێریت لە دەستەیەك کە پێکهاتووە لە 15 ئەندام

21 دوا ژمارە لە شێوازی 50، 46، 24 ، ... کامەیە ؟

22 $\frac{3\pi}{5}$ لە ڕادیان بگۆڕە بۆ پلە.

23 ئەو گۆشەیە کامەیە کە بە $\cos 0=\sin 30^\circ$

24 **ئەگەر** بڕوا بەردەزارێکی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان ژمارە 1 چەندە؟